

Θεωρία Γραφημάτων

2η Διάλεξη

Χ. Ραυτοπούλου

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Φεβρουάριος 2023

Βαθμοί κορυφών

Βαθμός κορυφής:

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

[Ορισμός μόνο για απλά γραφήματα.]

Ελάχιστος βαθμός γραφήματος:

$$\delta(G) = \min \{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Μέγιστος βαθμός γραφήματος:

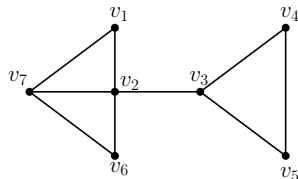
$$\Delta(G) = \max \{d_G(v) : v \in V(G)\}$$

Μέσος βαθμός γραφήματος:

$$d(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|}$$

Πυκνότητα γραφήματος:

$$\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$$



Απομονωμένη κορυφή:

Κορυφή v με $d_G(v) = 0$.

Εκκρεμής κορυφή:

Κορυφή v με $d_G(v) = 1$.

r -κανονικό (r -regular) γράφημα:

$\forall v \in V(G)$ ισχύει $d_G(v) = r$

Θεώρημα 2.1 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει:

- $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$
- $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$
- $\epsilon(G) = d(G)/2$

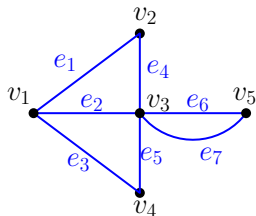
Απόδειξη :

i. Πίνακας πρόπτωσης

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	$d(v)$
v_1	1	1	1					3
v_2	1			1				2
v_3		1		1	1	1	1	5
v_4			1		1			2
v_5						1	1	2
	2	2	2	2	2	2	2	14

$\sum d(v)$ (green arrow pointing to 14)

$2|E(G)|$ (green arrow pointing to 14)



- Από τον ορισμό των $\delta(G)$, $d(G)$ και $\Delta(G)$.
- Από τον ορισμό των $\epsilon(G)$ και $d(G)$.



Πρόταση 2.2 :

Κάθε γράφημα G έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.

Απόδειξη :

Έστω $V_1 \subseteq V$: Σύνολο κορυφών περιττού βαθμού.
 $V_2 \subseteq V$: Σύνολο κορυφών άρτιου βαθμού. $\left. \vphantom{\begin{array}{l} V_1 \subseteq V \\ V_2 \subseteq V \end{array}} \right\} \Rightarrow V_1 \cup V_2 = V$

$$\text{Ισχύει ότι } \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v) = 2|E(G)|$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V_1} d_G(v) \text{ είναι άρτιος αριθμός.}$$

$$\Rightarrow |V_1| \text{ είναι άρτιο, γιατί } d_G(v), v \in V_1 \text{ είναι περιττός.}$$



Πρόταση 2.3 :

Κάθε r -κανονικό γράφημα G έχει $\frac{r|V(G)|}{2}$ ακμές.

Απόδειξη :

$$|E(G)| = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{2} = \frac{r|V(G)|}{2}$$



Ερώτηση 2.1: Το γράφημα G έχει ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό, έστω τις u και v . Συνδέονται οι u και v με μονοπάτι;

Ερώτηση 2.2: Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα G με 9 κορυφές;

Ερώτηση 2.3: Υπάρχει 9-κανονικό γράφημα G με 13 κορυφές;

Ερώτηση 2.4: Έστω 2 όμιλοι ποδοσφαίρου με 13 ομάδες ο καθένας. Μπορούμε να οργανώσουμε ένα πρωτάθλημα έτσι ώστε κάθε ομάδα να συμμετέχει σε 9 αγώνες με ομάδες του ομίλου της και σε 4 αγώνες με ομάδες του άλλου ομίλου;

Ερώτηση 2.5: Έστω ένα r -κανονικό διμερές γράφημα με διαμερίσεις X και Y . Ναδειχθεί ότι $|X| = |Y|$.

Πρόταση 2.4 :

Κάθε απλό γράφημα G έχει δύο κορυφές ίδιου βαθμού.

Απόδειξη :

- G απλό $\Rightarrow \forall v \in V(G) : d_G(v) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ όπου $n = |V(G)|$.
- Αλλά, το σύνολο των δυνατών βαθμών για τις κορυφές του G δεν μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα τους βαθμούς 0 και $n-1$.

[Η κορυφή με βαθμό $n-1$ είναι ενωμένη με όλες τις άλλες κορυφές, οπότε δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό 0.]

- Συνεπώς έχουμε $n-1$ το πολύ δυνατούς βαθμούς για τις n κορυφές.
- Άρα υπάρχουν δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό [αρχή του περιστερώνα]. ■

Πρόταση 2.5 :

Σε κάθε ομάδα από 2 ή περισσότερους ανθρώπους πάντα υπάρχουν δύο άτομα με τον ίδιο αριθμό φίλων μέσα στην ομάδα.

Πρόταση 2.6 :

Έστω απλό γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$. Τότε το G είναι συνδεδεμένο.

Απόδειξη :

- Θα δείξουμε ότι $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει μονοπάτι από την u στην v .

Περίπτωση 1: $e = (u, v) \in E$ Τότε υπάρχει μονοπάτι $u - v$ ✓

Περίπτωση 2: $e = (u, v) \notin E$

$$\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} |N_G(u)| \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \\ |N_G(v)| \geq \frac{|V(G)|-1}{2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset \quad (1)$$

Εάν $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset \Rightarrow$

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| = |N_G(u)| + |N_G(v)| \geq |V(G)| - 1 \quad (2)$$

Αλλά $\{u, v\} \notin N_G(u) \cup N_G(v)$

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \leq |V(G)| - 2 \quad (3)$$

Άτοπο λόγω της (2).

- (1) $\Rightarrow \exists w \in N_G(u) \cap N_G(v)$
 $\Rightarrow \exists e_1 = (u, w), e_2 = (w, v)$
 \Rightarrow Υπάρχει μονοπάτι $u - v$. ✓



Θεώρημα 2.7 :

Κάθε γράφημα G χωρίς βρόχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με τουλάχιστον $|E(G)|/2$ ακμές.

Απόδειξη [Κατασκευαστική] :

- Θα κατασκευάσουμε διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $\geq |E(G)|/2$ ακμές.

1. Έστω αυθαίρετη διαμέριση (X, Y) του $V(G)$ και

$H \subseteq G$ το διμερές επαγόμενο από τα X και Y γράφημα.

2. 2.1 Εάν $E(H) \geq |E(G)|/2$ τελειώσαμε. ✓

2.2 Αλλιώς, $[E(H) < |E(G)|/2]$

- Έστω $v \in V(G) : d_H(v) < d_G(v)/2$ (πάντα υπάρχει).
- Μετέθεσε την v στο άλλο μερίδιο.
- Προσάρμοσε το H ώστε να είναι διμερές: αφάισε τις ακμές από το H που ενώνονταν με την v πριν την μετάθεση $[d_H(v)$ ακμές] και πρόσθεσε τις ακμές που ενώνονται με την v στο G αλλά όχι στο H $[>d_H(v)$ ακμές].
- Πήγαινε στο 2.

• Ο αριθμός των ακμών του H αυξάνει μετά από κάθε μετακίνηση.

• Ο αλγόριθμος τερματίζει.

• Το γράφημα H είναι διμερές

[από κατασκευή]. ✓

• $E(H) \geq |E(G)|/2$

- $E(H) \geq |E(G)|/2$

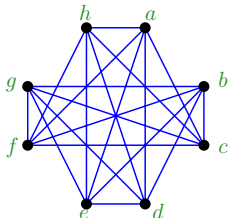
Απόδειξη :

Στο τέλος του αλγορίθμου ισχύει $\forall v \in V(G) : d_H(v) \geq d_G(v)/2$.

$$\begin{aligned} |E(H)| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(H)} d_H(v) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G(v)/2 \quad [V(H) = V(G)] \\ &= |E(G)|/2 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Ερώτηση 2.6: Δίνει πάντοτε ο αλγόριθμος το μέγιστο διμερές υπογράφημα;



- $H_1 : \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}$
 $|E(H_1)| = 12$
- $H_2 : \{g, h, a, b\}, \{c, d, e, f\}$
 $|E(H_2)| = 16$

Θεώρημα 2.8 :

Κάθε μη τετριμμένο γράφημα G χωρίς βρόχους έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $> |E(G)|/2$ ακμές.

[Τετριμμένο γράφημα: γράφημα χωρίς ακμές ή κορυφές]

Απόδειξη [Επαγωγή ως προς το $|V(G)|$.]:

Βάση $|V(G)| = 2$



$G = H$. Ισχύει. ✓

E.Y. Κάθε μη τετριμμένο χωρίς βρόχους γράφημα G με $|V(G)| \leq k$, $k \geq 2$, έχει διμερές υπογράφημα $H \subseteq G$ με $> |E(G)|/2$ ακμές.

E.B. Έστω αυθαίρετο γράφημα G με $|V(G)| = k + 1$.

- Έστω αυθαίρετη κορυφή $v \in V(G)$.
 - Θεωρώ το $G \setminus v$ [έχει k κορυφές].
 - $\xrightarrow{\text{E.Y.}} \exists H' \subseteq G \setminus v : |E(H')| > |E(G \setminus v)|/2$.
 - Έστω X και Y τα μερίδια του H' .
 - Προσθέτω την v στην διαμέριση όπου η v συνδέεται με τις λιγότερες ακμές.
- \Rightarrow Γράφημα H
- \Rightarrow Προσθέτουμε στο H' τουλάχιστον $d_G(v)/2$ ακμές.

$$\begin{aligned} |E(H)| &\geq |E(H')| + d_G(v)/2 \\ &> |E(G \setminus v)|/2 + d_G(v)/2 \\ &= (|E(G \setminus v)| + d_G(v))/2 \\ &= |E(G)|/2 \end{aligned}$$



Ερώτηση 2.7: Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού γραφήματος G .
Ναδειχθεί ότι η διαγώνιος του A^2 περιέχει τους βαθμούς των κορυφών του G .

Θεώρημα 2.9 [Kőnig-1916]:

Κάθε γράφημα G είναι επαγόμενο υπογράφημα κάποιου $\Delta(G)$ -κανονικού γραφήματος.

Απόδειξη :

- Για κάθε γράφημα G ορίζουμε την ποσότητα:

$$z(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - d_G(v))}{|V(G)|}$$

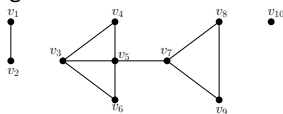
Το $z(G)$ αποτελεί μέτρο του πόσο απέχει το G από το να είναι $\Delta(G)$ -κανονικό.

- Εφαρμόζουμε επαναληπτικά την παρακάτω διαδικασία η οποία μειώνει το $z(G)$.
 1. $G_1 = G \cup G$.
 2. Πρόσθεσε ακμές μεταξύ αντίστοιχων κορυφών (σε διαφορετικά αντίγραφα) που έχουν βαθμό $< \Delta(G)$.
 $\implies G \subset G_1$ και $z(G) > z(G_1)$
 3. Εάν G_1 είναι $\Delta(G)$ -κανονικό τελειώσαμε.
Αλλιώς, $G = G_1$ πήγαινε στο 1. ■

Γραφική ακολουθία

- Έστω η ακολουθία (d_1, d_2, \dots, d_n) όπου $0 \leq d_i < n$, $d_i \in \mathbb{N}$.
- Με $sorted((d_1, d_2, \dots, d_n))$ συμβολίζουμε την ακολουθία που προκύπτει από την ταξινόμηση σε φθίνουσα διάταξη της (d_1, d_2, \dots, d_n) .
- Έστω $G = (V, E)$ και $s' = (d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$, $v_i \in V(G)$, $|V(G)| = n$ η ακολουθία βαθμών του G .
- Η ακολουθία $sorted((d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)))$ ονομάζεται **γραφική ακολουθία** του G .

G



Γραφική ακολουθία του G

$(4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0)$
| | | | | | | | | |
 $v_5 \ v_3 \ v_7 \ v_4 \ v_6 \ v_8 \ v_9 \ v_1 \ v_2 \ v_{10}$

Γραφική ακολουθία:

Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ ονομάζεται **γραφική** αν υπάρχει γράφημα $G(V, E)$ και μία $1-1$ και επί απεικόνιση $\sigma : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$: $d(v) = d_{\sigma(v)}$.

- Το γράφημα G **υλοποιεί** την ακολουθία s .
- Η ακολουθία s είναι η **ακολουθία βαθμών** του G .

Ερώτηση 2.8: Υπάρχουν διμερή γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών;

- i. $(3, 3, 2, 2, 2)$
- ii. $(3, 2, 2, 2, 2, 1)$
- iii. $(5, 2, 1, 1, 1)$
- iv. $(3, 3, 2, 2)$

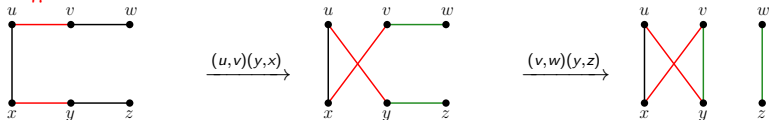
Ερώτηση 2.9: Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ η ακολουθία $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ δεν είναι γραφική.

Ερώτηση 2.10: Ναδειχθεί ότι η ακολουθία $(d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n)$ είναι γραφική αν η ακολουθία $\text{sorted}(n - d_1 - 1, n - d_2 - 1, \dots, n - d_n - 1)$ είναι γραφική.

Μεταγωγή:

Έστω κορυφές $x, y, z, w \in V(G)$ ενός απλού γραφήματος G και $(x, y), (z, w) \in E(G)$ αλλά $(x, z)(y, w) \notin E(G)$. Ορίζουμε ως **μεταγωγή** πάνω στο σύνολο $\{x, y, z, w\}$ την αντικατάσταση στο G των ακμών $(x, y), (z, w)$ από τις $(x, z)(y, w)$.

Παράδειγμα:



Σημείωση: Μια μεταγωγή σε ένα σύνολο 4 κορυφών ενός γραφήματος G δεν αλλάζει την ακολουθία βαθμών του G .

Ανηγμένη ακολουθία:

Έστω η ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n)$. Η ακολουθία $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ ορίζεται ως η **ανηγμένη ακολουθία** της s .

Παράδειγμα: Έστω $s = (4, 3, 2, 2, 2, 2, 1)$. Η ανηγμένη ακολουθία της s είναι η $s_1 = (2, 1, 1, 1, 2, 1)$.

Θεώρημα 2.10 [Havel-Hakimi]:

Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n)$ είναι γραφική αν η ανηγμένη ακολουθία της s είναι γραφική.

Απόδειξη :

“ \Leftarrow ” Έστω $s_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ η ανηγμένη ακολουθία της s και έστω ότι η s_1 είναι γραφική.

- s_1 γραφική $\Rightarrow \exists G_1$ με $V(G_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$

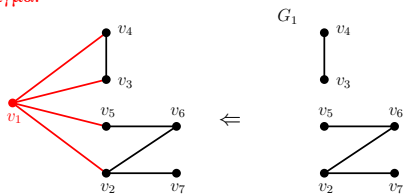
$$d(v_i) = \begin{cases} d_i - 1 & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & d_1 + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

- Κατασκευάζω γράφημα $G(V, E)$:
 $V(G) = V(G_1) \cup \{v_1\}$
 $E(G) = E(G_1) \cup \{(v_1, v_i) : 2 \leq i \leq d_1 + 1\}$

\Rightarrow Ο G υλοποιεί την ακολουθία s .

\Rightarrow Η ακολουθία s είναι γραφική. ✓

Παράδειγμα:



“ \Rightarrow ” $s = (d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n)$ \Rightarrow $s' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$
 είναι γραφική. είναι γραφική.

- s γραφική $\Rightarrow \exists G = (V, E)$ με $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$:
 $d(v_i) = d_i, i = 1, \dots, n$

Περίπτωση 1: $\exists u \in V(G) : d(u) = d_1$ και η u είναι γειτονική με κορυφές με βαθμούς $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$.

$\Rightarrow G \setminus u$ έχει ακολουθία βαθμών την s' . ✓

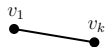
Περίπτωση 2: \nexists κορυφή u όπως στην περίπτωση 1.

- Έστω η κορυφή v_i έχει βαθμό $d(v_i) = d_i, i = 1, \dots, n$.

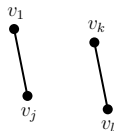
Επειδή η v_1 δεν είναι γειτονική $\Rightarrow \exists v_j$ και v_k με $d_j > d_k$:
 με όλες τις $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ Η v_1 δεν είναι γειτονική με v_j .
 Η v_1 είναι γειτονική με v_k .

Λόγω του ότι $d(v_j) > d(v_k)$ $\Rightarrow \exists$ κορυφή v_l :
 Η v_l είναι γειτονική με v_j .
 Η v_l δεν είναι γειτονική με v_k .

- Μία μεταγωγή στις v_1, v_k, v_j, v_l δίνει γράφημα G' με ίδια ακολουθία βαθμών με το G .
- ΑΛΛΑ: το άθροισμα των βαθμών των γειτόνων της v_1 στο G' είναι μεγαλύτερο από το ίδιο άθροισμα στο G .



⇓ μεταγωγή



- Συνεχίζοντας, με τον ίδιο τρόπο, θα φτάσουμε στην περίπτωση 1.
 \Rightarrow Η G' είναι γραφική. ✓



Παράδειγμα: Είναι η ακολουθία (5, 4, 3, 2, 2, 1, 1) γραφική; Εάν ναι, να δοθεί γράφημα G που την υλοποιεί.

$$s_1 = (5, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$$

↓

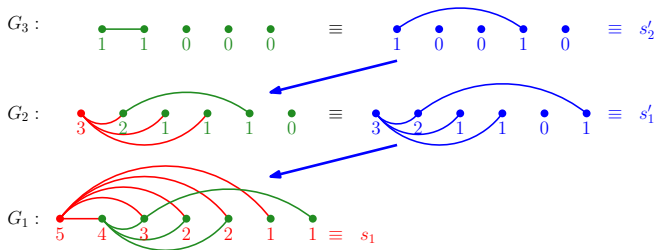
$$s'_1 = (3, 2, 1, 1, 0, 1) \Rightarrow s_2 = \text{sorted}(s'_1) \Rightarrow$$

$$s_2 = (3, 2, 1, 1, 1, 0)$$

↓

$$s'_2 = (1, 0, 0, 1, 0) \Rightarrow s_3 = \text{sorted}(s'_2) \Rightarrow$$

$$s_3 = (1, 1, 0, 0, 0) \text{ Γραφική.}$$



Θεώρημα 2.11 [Erdős-Gallai]:

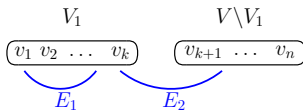
Μία φθίνουσα ακολουθία $s = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$, $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$ είναι γραφική αν

- i. $\sum_{i=1}^n d_i$ είναι άρτιο, και ii. $\forall k : 1 \leq k < n$, $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min \{k, d_i\}$

Απόδειξη :

i. Προφανές. ✓

ii. $\sum_{i=1}^k d_i :$



• E_1 : $\left(\begin{array}{c} \text{Ακμές ανάμεσα} \\ \text{στις κορυφές του } V_1. \end{array} \right) \times 2$
 $\leq k(k-1)$

- E_2 : Ακμές από το V_1 στο $V \setminus V_1$. Κάθε κορυφή u του $V \setminus V_1$ ενώνεται με:
 - Το πολύ με d_u κορυφές του V_1 .
 - Το πολύ με k κορυφές του V_1 .
- \Rightarrow Το πολύ με $\min \{k, d_u\}$.

Συνολικά: $\leq \sum_{i=k+1}^n \min \{k, d_i\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min \{k, d_i\}, \forall 1 \leq k < n \quad \checkmark$$

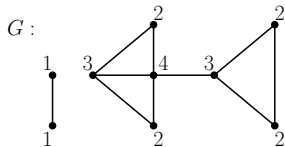
Ερώτηση 2.11: Ναδειχθεί ότι για πολυγραφήματα ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Η φθίνουσα ακολουθία} \\ s = (d_1 \geq d_2, \geq \dots \geq d_n), n \geq 2, d_1 \geq 1 \\ \text{είναι γραφική.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d_i \text{ είναι άρτιο.}$$

Σύνολα βαθμών κορυφών:

Δεδομένου γραφήματος G συμβολίζουμε με D_G το **σύνολο των [διακριτών] βαθμών** των κορυφών του G .

Παράδειγμα:



$$s = (4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$$

$$D_G = \{4, 3, 2, 1\}$$

Θεώρημα 2.12 [Karoor-Polimeni-Wall]:

Για κάθε σύνολο θετικών ακεραίων $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 1$, με $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, υπάρχει γράφημα G με σύνολο βαθμών $D_G = S$. Επιπλέον υπάρχει τέτοιο γράφημα G με $|V(G)| = a_n + 1$.

Απόδειξη [Κατασκευαστικά, με επαγωγή ως προς το n]:

- Ο βαθμός του G είναι $\geq a_n + 1$. Άρα, θα δείξουμε ότι υπάρχει G με $|V(G)| = a_n + 1$.

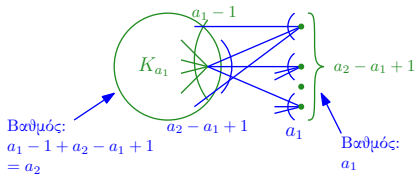
$n = 1$ Το πλήρες γράφημα K_{a_n+1} με $a_n + 1$ κορυφές είναι το ζητούμενο.

Όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό a_1 . ✓

$n = 2$ Συμβολίζουμε με A_λ το γράφημα με λ κορυφές και χωρίς ακμές.

$A_\lambda = (\{v_1, v_2, \dots, v_\lambda\}, \emptyset)$

Το γράφημα $K_{a_1} * A_{a_2 - a_1 + 1}$ [* : σύνδεση γραφημάτων]:



- Έχει σύνολο βαθμών $\{a_1, a_2\}$ ✓
- $|V(G)| = a_2 - a_1 + 1 + a_1 = a_2 + 1$ ✓

E.Y. Για κάθε σύνολο θετικών ακεραίων $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ με $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ και $1 \leq m < n$, ισχύει ότι:

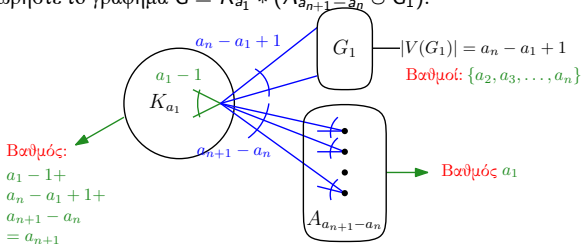
i. Υπάρχει γράφημα G με σύνολο βαθμών S .

ii. $|V(G)| = a_m + 1$

E.B. • Έστω σύνολο $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ με $a_i \in \mathbb{N}^+$, $a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}$

• Από E.Y., \exists γράφημα G_1 με σύνολο βαθμών $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_n - a_1\}$ και $|V(G_1)| = a_n - a_1 + 1$.

• Θεωρήστε το γράφημα $G = K_{a_1} * (A_{a_{n+1}-a_n} \cup G_1)$.



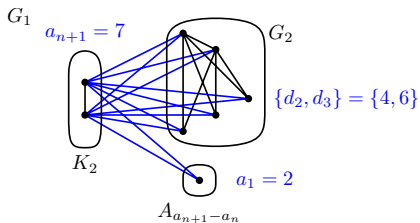
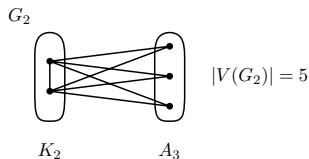
• Έχει σύνολο βαθμών $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. ✓

• $|V(G)| = \underbrace{a_1}_{K_{a_1}} + \underbrace{a_{n+1} - a_n}_{A_{a_{n+1}-a_n}} + \underbrace{a_n - a_1 + 1}_{G_1} = a_{n+1} + 1$ ✓



Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί γράφημα με 8 κορυφές και σύνολο βαθμών $\{2, 4, 6, 7\}$.

- $D_1 = \{2, 4, 6, 7\} \rightarrow D_2 = \{d_2 - d_1, d_3 - d_1\} = \{2, 4\}$



- $D_{G_1} = \{2, 4, 6, 7\}$
- $|V(G_1)| = 8$