

Θεωρία Γραφημάτων

3η Διάλεξη

Χ. Ραυτοπούλου

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

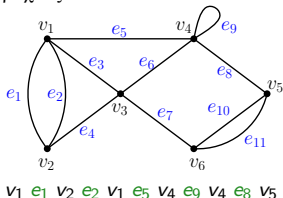
Φεβρουάριος 2023

Μονοπάτια, κύκλοι και αποστάσεις

Έστω ένα γράφημα $G(V, E)$ το οποίο μπορεί να έχει παράλληλες ακμές ή βρόχους.

Περίπατος:

Ένας **περίπατος μήκους k** είναι μια ακολουθία $\pi = \langle v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k \rangle$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές του γραφήματος G έτσι ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \leq i \leq k$.



(v_0, v_k) -περίπατος, v_0, v_k : **τερματικές κορυφές ή άκρα** του περιπάτου.

Περίγηση:

Ένας περίπατος με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.

$v_6 e_{11} v_5 e_{10} v_6 e_7 v_3 e_6 v_4 e_8 v_5 e_{10} v_6$

Μονοκονδυλιά (Trail):

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.

$v_1 e_1 v_2 e_2 v_1 e_5 v_4$

Μονοπάτι:

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.

$v_1 e_2 v_2 e_4 v_3 e_7 v_6$

Κύκλος:

Ένα μονοπάτι με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.

Για απλά γραφήματα

Περίπατος:

Μία ακολουθία κορυφών $\pi = \langle v_0 v_1 \dots v_k \rangle$ τέτοια ώστε $(v_{i-1}, v_i) \in E, 1 \leq i \leq k$.

- P_k : Το γράφημα-μονοπάτι με k κορυφές.

$$P_k = (\{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \{e_i = (v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < k\})$$

- C_k : Το γράφημα-κύκλος με k κορυφές.

$$C_k = (\{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \{e_i = (v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i < k\} \cup (v_k, v_1))$$

Χορδή:

Μια ακμή $e = (v_i, v_j)$ που ενώνει δυο κορυφές ενός κύκλου/μονοπατιού $\pi = \langle v_0 v_1 v_2 \dots v_i \dots v_j \dots v_k \rangle$, όπου $e \notin \pi$, ή ισοδύναμα $i \notin \{j-1, j+1\}$.

- Άχορδο μονοπάτι, άχορδος κύκλος

Οπή:

Ένα επαγόμενο υπογράφημα ενός γραφήματος το οποίο [επαγόμενο υπογράφημα] είναι άχορδος κύκλος.

Ερώτηση 3.1: Έστω ένα γράφημα G και ένας κύκλος του C μήκους k . Είναι το επαγόμενο υπογράφημα από τις κορυφές του C ισομορφικό με το C_k ;

Ερώτηση 3.2: Έστω γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$. Ναδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

Ερώτηση 3.3: Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq 2$. Ναδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο μήκους $\geq \delta(G) + 1$. Ισχύει για γραφήματα με βρόχους/παράλληλες ακμές;
Συμβουλή: Εξετάστε ένα μέγιστο μονοπάτι.

Ερώτηση 3.4: Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq k$. Ναδειχθεί ότι το G έχει ένα μονοπάτι μήκους k .

Λήμμα 3.1:

Έστω γράφημα G και $u, v \in V(G)$. Το G περιέχει έναν (u, v) -περίπατο αν περιέχει ένα (u, v) -μονοπάτι.

Απόδειξη :

“ \Leftarrow ”

Προφανές. Από τον ορισμό του μονοπατιού ✓

“ \Rightarrow ” Θα δείξουμε ότι: "Αν το G περιέχει ένα (u, v) -περίπατο W τότε το G περιέχει ένα (u, v) -μονοπάτι το οποίο αποτελείται από κορυφές του W ."

- Έστω ένας περίπατος $W = [u = v_1, \dots, v_k = v]$ **ελάχιστου** μήκους στο G για τον οποίο η πρόταση δεν ισχύει.
- Η κορυφή v εμφανίζεται μόνο μία φορά στο W .
- Εξετάζουμε τον περίπατο $W' = [u = v_1, \dots, v_{k-1}]$ που προκύπτει από την αφαίρεση της κορυφής v_k από το W .
- Το W' έχει μήκος $< k \Rightarrow \exists (u, v_{k-1})$ -μονοπάτι P με κορυφές του W και δεν περιλαμβάνει την κορυφή v .
- Το μονοπάτι P ακολουθούμενο από την ακμή (v_{k-1}, v) είναι ένα (u, v) -μονοπάτι αποτελούμενο από κορυφές του W . **Άτοπο** ✓



Θεώρημα 3.2 :

Έστω γράφημα G και έστω A ο πίνακας γειτνίασης του. Τότε η τιμή $A^\ell [i, j]$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών (v_i, v_j) -περιπάτων μήκους ℓ στο G .

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το ℓ]:

Βάση: Ισχύει για $\ell = 1$. $A[i, j] = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$
 $\Leftrightarrow \exists (v_i, v_j)$ -μονοπάτι μήκους 1 ✓

E.Y. Έστω ότι ισχύει για $k = \ell - 1$, δηλαδή $A^{\ell-1}[i, j]$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών (v_i, v_j) -περιπάτων μήκους $\ell - 1$.

E.B. $A^\ell = A^{\ell-1} \times A \Rightarrow$
 $A^\ell [i, j] = \sum_{k=1}^{|\mathcal{V}(G)|} A^{\ell-1}[i, k]A[k, j]$

Κάθε ένας από τους $A^{\ell-1}[i, k]$ (v_i, v_k) -περιπάτους ο οποίος συνεχίζεται από την ακμή (v_k, v_j) είναι ένας (v_i, v_j) -περίπατος. ✓ ■

Ερώτηση 3.5: Ισχύει για γραφήματα με βρόχους και παράλληλες ακμές?

- Για πολυγραφήματα:

$$A[i, j] = |\{e : e = (v_i, v_j) \in E\}|$$

Απόσταση:

Έστω γράφημα G και $u, v \in V(G)$. Η **απόσταση** $\text{dist}(u, v)$ είναι το μήκος του ελαχίστου (u, v) -μονοπατιού στο G .

- $\text{dist}(u, v) = +\infty$ εάν δεν υπάρχει (u, v) -μονοπάτι.

Πρόταση 3.3 (Τριγωνική ανισότητα):

Έστω γράφημα G και $u, v, w \in V(G)$ τρεις κορυφές του G . Τότε ισχύει:

$$\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w).$$

Απόδειξη :

- Έστω ότι $\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \neq +\infty$, αλλιώς ισχύει τετριμμένα.
 - $\text{dist}(u, v)$ το μήκος του ελάχιστου (u, v) -μονοπατιού P_{uv} .
 - $\text{dist}(v, w)$ το μήκος του ελάχιστου (v, w) -μονοπατιού P_{vw} .
 - Η παράθεση $P_{uw} = P_{uv}P_{vw}$ δημιουργεί (u, w) -περίπατο με μήκος \geq από το ελάχιστο (u, w) -μονοπάτι.
- $\Rightarrow \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w) \geq \text{dist}(u, w)$. ■

Λήμμα 3.4:

Έστω γράφημα G . Κάθε περιήγηση περιττού μήκους στο G περιέχει έναν περιττό κύκλο στο G .

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το μήκος ℓ της περιήγησης] :

• Έστω W μια περιήγηση περιττού μήκους ℓ .

Βάση: $\ell = 1 \Rightarrow$ Η περιήγηση είναι βρόχος, δηλαδή κύκλος μήκους 1. ✓

E.Y. Έστω ότι κάθε περιήγηση περιττού μήκους $< \ell$ περιέχει έναν περιττό κύκλο.

E.B. Έστω W μια περιήγηση περιττού μήκους ℓ .

Περίπτωση 1: Η W δεν περιέχει επαναλαμβανόμενες κορυφές.

\Rightarrow Τότε η W είναι εξ' ορισμού [περιττός] κύκλος. ✓

Περίπτωση 2: Η W περιέχει επαναλαμβανόμενη κορυφή, έστω u [εκτός της κοινής τερματικής κορυφής].

- Η W μπορεί να διαμελιστεί σε δύο μικρότερες περιηγήσεις W_1, W_2 .
- Μιας και η W είναι περιττού μήκους, μια εκ των W_1, W_2 είναι επίσης περιττού μήκους, έστω η W_1 .
- Από **E.Y.** η W_1 περιέχει περιττό κύκλο, άρα και η W . ✓



Θεώρημα 3.5 :

Ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Απόδειξη :

⇒ Έστω διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$.

- Έστω κύκλος $C = [v_1 v_2 \dots v_k = v_1]$ και έστω $v_1 \in A$
 - ⇒ $v_2 \in B, v_3 \in A,$
 $v_4 \in B, \dots$
 - ⇒ $v_{2i-1} \in A$ και $v_{2i} \in B \forall i \geq 1.$
 - ⇒ $v_k = v_1 \in A \Rightarrow k = 2i - 1$ για $i \geq 1.$
 - ⇒ Ο κύκλος C έχει άρτιο μήκος. ✓

“←” Έστω γράφημα G που δεν περιέχει περιττούς κύκλους. Θα βρούμε διαμέριση A, B του $V(G)$ και θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακμή $e = (x, y) : x, y \in A$ ή $x, y \in B$.

- Έστω κορυφή u και A, B τα σύνολα κορυφών που βρίσκονται σε άρτια και περιττή απόσταση από την u , αντίστοιχα.

$$A \cap B = \emptyset \text{ και } u \in A [\text{dist}(u, u) = 0].$$

- Έστω ακμή $e = (x, y) : x, y \in A$ [όμοια εάν $x, y \in B$].

- Η περιήγηση

$$W = \{ \underbrace{u \dots x}_{\text{άρτιο}} \underbrace{y \dots u}_{\text{άρτιο}} \}$$

στο G είναι περιττού μήκους.

⇒ Η W περιέχει έναν περιττό κύκλο [από λήμμα 3.1].

Άτοπο, γιατί το G δεν περιέχει περιττούς κύκλους.

⇒ Κάθε ακμή $e = (x, y)$ έχει $x \in A, y \in B$ ή $x \in B, y \in A$. ✓



Εκκεντρότητα κορυφής του G [eccentricity]:

$$\text{ecc}(v) = \max_{u \in V(G)} \text{dist}(v, u)$$

Διάμετρος του G :

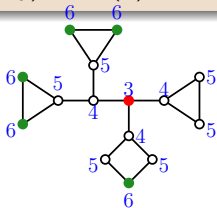
$$\text{diam}(G) = \max_{v \in V(G)} \text{ecc}(v)$$

Ακτίνα του G :

$$\text{rad}(G) = \min_{v \in V(G)} \text{ecc}(v)$$

Αντιδιαμετρικές κορυφές $x, y \in V(G)$:

$$\text{dist}(x, y) = \text{diam}(G)$$



$$\begin{aligned} \text{diam}(G) &= 6 \\ \text{rad}(G) &= 3 \\ \text{center}(G) &= \{\bullet\} \\ \text{far}(G) &= \{\bullet\} \end{aligned}$$

Κεντρική κορυφή:

Κάθε κορυφή $v \in V(G) : \text{ecc}(v) = \text{rad}(G)$.

Κέντρο του G :

$$\text{center}(G) = \{v : v \in V(G) \text{ και } \text{ecc}(v) = \text{rad}(G)\}$$

Απόκεντρη κορυφή:

Κάθε κορυφή $v \in V(G) : \text{ecc}(v) = \text{diam}(G)$.

Απόκεντρο του G :

$$\text{far}(G) = \{v : v \in V(G) \text{ και } \text{ecc}(v) = \text{diam}(G)\}$$

Θεώρημα 3.6 :

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι:

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

Απόδειξη :

i. $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G)$

Άμεσα, από τους ορισμούς. ✓

ii. $\text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$

• Έστω 2 "αυθαίρετες" κορυφές $x, y \in V(G)$:

$$\text{dist}(x, y) = \text{diam}(G).$$

• Έστω $v \in V(G)$ μια κεντρική κορυφή \Rightarrow

$$\text{dist}(v, x) \leq \text{ecc}(v) = \text{rad}(G), \text{ και}$$

$$\text{dist}(v, y) \leq \text{ecc}(v) = \text{rad}(G).$$

• Από τριγωνική ανισότητα:

$$\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, v) + \text{dist}(v, y)$$

$$\Rightarrow \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G). \quad \checkmark$$



Θεώρημα 3.7 :

Για κάθε γράφημα G , είτε $\text{center}(G) = \text{far}(G)$
ή $\text{center}(G) \cap \text{far}(G) = \emptyset$.

Απόδειξη :

- Έστω $v \in \text{center}(G) \cap \text{far}(G)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} v \in \text{center}(G) & \Rightarrow \text{ecc}(v) = \text{rad}(G) \\ v \in \text{far}(G) & \Rightarrow \text{ecc}(v) = \text{diam}(G) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{diam}(G) = \text{rad}(G) \quad (1)$$

$\forall u \in V(G)$ ισχύει:

$$\text{rad}(G) \leq \text{ecc}(u) \leq \text{diam}(G) \quad (2)$$

- (1),(2) \Rightarrow Όλες οι κορυφές έχουν ίδια εκκεντρότητα.
 $\Rightarrow \text{center}(G) = \text{far}(G)$.



Ερώτηση 3.6: Να δειχθεί ότι για κάθε δένδρο T ισχύει ότι $|\text{center}(T)| \in \{1, 2\}$.

Ερώτηση 3.7: Να σχεδιαστεί αλγόριθμος που υπολογίζει το κέντρο $\text{center}(T)$ ενός δένδρου T .

Ερώτηση 3.8: Έστω ένα συνδεδεμένο γράφημα G . Είναι το $\text{center}(G)$ πάντα συνδεδεμένο?

Ερώτηση 3.9: Να υπολογιστούν τα $\text{rad}(G)$, $\text{diam}(G)$, $\text{center}(G)$, $\text{far}(G)$ όπου G το γράφημα:

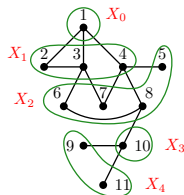
- i. $M_{a,b}$: Το πλέγμα διαστάσεων $a \times b$.
- ii. Q_r : Ο υπερκύβος διάστασης r .
Πόσα ζεύγη αντιδιαμετρικών κορυφών έχει ο Q_r ;

Ερώτηση 3.10: Ισχύει ότι για κάθε γράφημα G , $\text{diam}(G) \geq \delta(G)$;

Αποσυνθέσεις απόστασης

Αποσύνθεση απόστασης:

Έστω γράφημα G και κορυφή $u \in V(G)$. Η **αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u** είναι η ακολουθία συνόλων $A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_{\text{ecc}(u)}]$ όπου $X_i = \{v : v \in V(G) \text{ και } \text{dist}(u, v) = i\}$.



$$A(1) = \{ \{1\}, \\ \{2, 3, 4\}, \\ \{5, 6, 7, 8\}, \\ \{10\}, \\ \{9, 11\} \}$$

Εναλλακτικός ορισμός:

Έστω γράφημα G και κορυφή $u \in V(G)$. Η **αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u** είναι η ακολουθία συνόλων $A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_{\text{ecc}(u)}]$ όπου:

$$X_0 = \{u\}$$

$$X_i = N_G(X_{i-1}) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j, \quad 1 \leq i \leq \text{ecc}(u)$$

Σημείωση: $X_i \cap X_j = \emptyset$
 $\forall 0 \leq i < j \leq \text{ecc}(u)$

Λήμμα 3.8:

Έστω $A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_{\text{ecc}(u)}]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u . Τότε $\forall 0 \leq i \leq j \leq \text{ecc}(u)$ και $\forall x, y \in V(G) : x \in X_i, y \in X_j$, κάθε μονοπάτι P που συνδέει τις κορυφές x και y τέμνει όλα τα σύνολα $X_i \dots X_j$.

Απόδειξη :

- Έστω $x = u_0, u_1, \dots, u_{q-1}, u_q = y$ ένα (x, y) -μονοπάτι.
Το μονοπάτι αντιστοιχεί στην ακολουθία $a = [a_0, a_1, \dots, a_q]$ όπου $u_\ell \in X_{a_\ell}, 0 \leq \ell \leq q$.
 - $a_0 = i, a_q = j$
 - χρήση εναλλακτικού ορισμού $\left[\begin{array}{l} \forall \text{ κορυφή } v \in X_k, 0 \leq k \leq \text{ecc}(u) \text{ ισχύει:} \\ N_G(v) \subseteq X_{k-1} \cup X_k \cup X_{k+1} \text{ [εφόσον ορίζονται]} \end{array} \right.$
 - Στην ακολουθία a ισχύει ότι $|a_{k-1} - a_k| \leq 1, \forall 0 < k < q$.
[Διαδοχικοί όροι απέχουν το πολύ κατά 1.]
- ⇒ Η a περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς στο διάστημα $i \dots j$. ■

Λήμμα 3.9:

Έστω γράφημα G και έστω κορυφή $u \in V(G)$. Τότε, ο αριθμός των μονοπατιών μήκους ℓ που έχουν την u ως άκρο τους είναι το πολύ

$$d(u)(\Delta(G) - 1)^{\ell-1}$$

Απόδειξη :

- Έστω P_u^i , $1 \leq i \leq \ell$ το σύνολο των μονοπατιών που έχουν την u ως το ένα άκρο τους και έχουν μήκος i .

$$|P_u^1| = d(u) \quad (3)$$

- Κάθε μονοπάτι του P_u^{i+1} , $1 \leq i < \ell$ αποτελεί επέκταση ενός μονοπατιού του P_u^i
- Έστω $o(P)$ το άλλο άκρο κάθε μονοπατιού που ξεκινάει από την u .

$$|P_u^{i+1}| \leq \sum_{P \in P_u^i} (d(o(P)) - 1) \leq \sum_{P \in P_u^i} (\Delta(G) - 1) \leq |P_u^i|(\Delta(G) - 1)$$

$$|P_u^{i+1}| \leq |P_u^i|(\Delta(G) - 1) \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow |P_u^\ell| \leq d(u)(\Delta(G) - 1)^{\ell-1}$$



Λήμμα 3.10:

Έστω γράφημα G με $\Delta(G) \leq d$. Τότε για κάθε κορυφή $u \in V(G)$ υπάρχουν το πολύ $1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^\ell - 1)$ κορυφές του G σε απόσταση $\leq \ell$ από την u .

Απόδειξη :

- Έστω $A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_\ell]$ η αποσύνθεση απόστασης του G ως προς την u .
- Εξ' ορισμού, $|X_i|$, $0 \leq i \leq \ell$ είναι το πλήθος των κορυφών σε απόσταση i από την u .
 $\Rightarrow \exists \geq |X_i|$ μονοπάτια από την u προς το X_i μήκους i .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\ell} |X_i| &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\ell} d(u)(\Delta(G) - 1)^{i-1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{\ell} d(d-1)^{i-1} \\ &= 1 + d \sum_{i=0}^{\ell-1} (d-1)^i \stackrel{*}{=} 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^\ell - 1) \end{aligned}$$

[* Άθροισμα S_n n όρων γεωμετρικής προόδου $S_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1} = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$]

Θεώρημα 3.11 :

Έστω γράφημα G με $\text{rad}(G) \leq r$ και $\Delta(G) \leq d$. Τότε $|V(G)| \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^r - 1)$.

Απόδειξη :

Με εφαρμογή του προηγούμενου λήμματος για κάποια κορυφή $u \in \text{center}(G)$.

Πλάτος απόστασης του G ως προς την u :

$$\text{πα}(u) = \max \{|X_i|\}, X_i \in A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_{\text{ecc}(u)}]$$

Πλάτος απόστασης γραφήματος:

$$\text{πα}(G) = \min_{u \in V(G)} \{\text{πα}(u)\}$$

Θεώρημα 3.12 :

Έστω γράφημα G . Τότε ισχύει ότι $\text{πα}(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{\text{diam}(G)}$.

Απόδειξη :

- Έστω $u \in V(G) : \text{πα}(u) = \text{πα}(G)$ και έστω $A(u) = [X_0, X_1, \dots, X_{\text{ecc}(u)}]$

$$|V(G)| \leq 1 + \sum_{i=1}^{\text{ecc}(u)} |X_i| \leq 1 + \text{ecc}(u)\text{πα}(u) \leq 1 + \text{diam}(G)\text{πα}(G)$$

$$\Rightarrow \text{πα}(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{\text{diam}(G)}$$

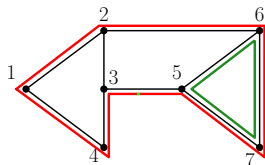


Περίμετρος γραφήματος G [που περιέχει κύκλο(ς)]:

$\text{crm}(G)$: Μήκος ενός μέγιστου [μήκους] κύκλου του G .

Περιφέρεια γραφήματος G [που περιέχει κύκλο(ς)]:

$\text{girth}(G)$: Μήκος ενός ελάχιστου [μήκους] κύκλου του G .



$$\text{crm}(G) = 7$$

κύκλος:

(1, 4, 3, 5, 7, 6, 2, 1)

$$\text{girth}(G) = 3$$

κύκλος:

(5, 6, 7)

Θεώρημα 3.13 :

Έστω απλό γράφημα G που περιέχει κύκλο(ς). Τότε, $\delta(G) \leq \text{crm}(G) - 1$.

Απόδειξη :

- Έστω $P = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ ένα μέγιστο μονοπάτι του G .
- Όλες οι κορυφές του $N_G(u_0)$ ανήκουν στο μονοπάτι.
 $\Rightarrow |N_G(u_0)| \geq \delta(G)$ γείτονες της u ανήκουν στο μονοπάτι.
 $\Rightarrow \exists$ κύκλος μήκους $\geq \delta(G) + 1$ στο G .
 $\Rightarrow \delta(G) \leq \text{crm}(G) - 1$.



Θεώρημα 3.14 :

Κάθε γράφημα G με πυκνότητα $\epsilon(G) \geq 1$ περιέχει κύκλο.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το $|V(G)|$, $(\epsilon(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|})$]:

- Ισχύει εξ' ορισμού για κάθε γράφημα με βρόχους ή παράλληλες ακμές.
Αρα, θα το δείξουμε για απλά γραφήματα.

Βάση: $n = 3 \Rightarrow m \geq 3$



Μοναδικό γράφημα. ✓

E.Y. Έστω ότι κάθε γράφημα H με $\epsilon(H) \geq 1$ και $3 \leq |V(H)| < n$ έχει κύκλο

E.B. Έστω γράφημα G με $\epsilon(G) \geq 1$ και $3 < |V(G)| = n$

Περίπτωση 1: $\delta(G) \geq 2$.

Δημιουργούμε τον περίπατο όπου ξεκινώντας από μια κορυφή, βγαίνουμε από αυτή από διαφορετική ακμή από αυτήν που μπήκαμε. Ο περίπατος μπορεί να συνεχίζεται συνέχεια γιατί $\delta(G) \geq 2$. Μετά από $|V(G)|$ βήματα θα επαναληφθεί κάποια κορυφή. \Rightarrow κύκλος ✓

Περίπτωση 2: $\delta(G) = 1$.

- Υπάρχει κορυφή u με $d(u) = 1$. $\Rightarrow G \setminus u$ έχει:

$$e(G \setminus u) = \frac{|E(G \setminus u)|}{|V(G \setminus u)|} = \frac{|E(G)| - 1}{|V(G)| - 1} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \geq 1$$

$\xRightarrow{\text{E.Y.}}$ $G \setminus u$ έχει κύκλο. $\Rightarrow G$ έχει κύκλο. ✓



Περίπτωση 3: $\delta(G) = 0$.

- Υπάρχει κορυφή u με $d(u) = 0$, δηλαδή, το G δεν είναι συνεκτικό. $\Rightarrow G \setminus u$ έχει:

$$e(G \setminus u) = \frac{|E(G \setminus u)|}{|V(G \setminus u)|} = \frac{|E(G)|}{|V(G)| - 1} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \geq 1$$

$\xRightarrow{\text{E.Y.}}$ $G \setminus u$ έχει κύκλο. $\Rightarrow G$ έχει κύκλο. ✓



Θεώρημα 3.15 :

Έστω γράφημα G με κύκλο(υς) και $\delta(G) \geq d$. Τότε ισχύει:

$$|V(G)| \geq \begin{cases} 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{girth}(G) = 2r+1 \\ 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i & \text{girth}(G) = 2r \end{cases}$$

Απόδειξη :

Περίπτωση 1: $\text{girth}(G) = 2r+1$.

• Έστω X_0, X_1, \dots, X_r τα πρώτα $r+1$ σύνολα μιας αποσύνθεσης απόστασης $A(u)$ ως προς κάποια κορυφή $u \in V(G)$ η οποία ανήκει σε έναν κύκλο μήκους $\text{girth}(G)$.

• $\forall v \in X_i, 1 \leq i \leq r$, η v έχει ακριβώς 1 γείτονα στο X_{i-1} .

[Διαφορετικά, έστω ότι είχε 2 γείτονες w_1 και $w_2 \in X_{i-1}$.

$\Rightarrow \exists$ μονοπάτια $u \rightarrow w_1$ και $u \rightarrow w_2$ ίδιου μήκους $(i-1)$.

$\Rightarrow \exists$ κύκλος μήκους το πολύ $2i \leq 2r < \text{girth}(G)$. **Άτοπο** (ορισμός του $\text{girth}(G)$.)]

• $|X_i| \geq (d-1)|X_{i-1}|, 2 \leq i \leq r, \quad |X_0| = 1, \quad |X_1| \geq d$

• $|V(G)| \geq \sum_{i=0}^r |X_i| \geq 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{r-1}$

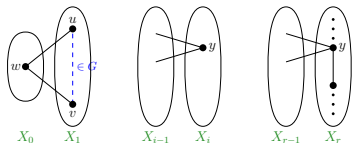
$$= 1 + d \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i \quad \checkmark$$

Περίπτωση 2: $\text{girth}(G) = 2r$.

- Έστω (u, v) μια αυθαίρετη ακμή του G που ανήκει σε κύκλο μήκους $\text{girth}(G)$.
- $G' = G \setminus (u, v) \cup \{(u, w), (w, v)\}$
- Έστω X_0, X_1, \dots, X_r τα πρώτα $r+1$ σύνολα μιας αποσύνθεσης απόστασης $A(w)$.
- $\forall y \in X_i, 2 \leq i \leq r$, η y έχει ακριβώς 1 γείτονα στο X_{i-1} .

[Εάν $\exists y \in X_i, 2 \leq i \leq r$ με 2 γείτονες στο X_{i-1}
τότε έχω στο G' κύκλο μεγέθους $2i \Rightarrow$
Τότε, έχω στο G κύκλο μεγέθους $2i - 1$.

$$2i - 1 \leq 2r - 1 < \text{girth}(G). \quad \text{Άτοπο.}]$$



- $|X_0| = 1, \quad |X_1| = 2, \quad |X_i| \geq (d-1)|X_{i-1}|, \quad 2 < i \leq r$

$$|V(G')| \geq \sum_{i=0}^r |X_i| \geq 1 + 2 + 2(d-1) + \dots + 2(d-1)^{r-1} = 1 + 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i \quad (5)$$

$$|V(G)| = |V(G')| - 1 \quad (6)$$

$$(5),(6) \Rightarrow |V(G)| \geq 2 \sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i \quad \checkmark \quad \blacksquare$$