

Θεωρία Γραφημάτων

5η Διάλεξη

A. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Δένδρα

Δένδρο:

Ένα γράφημα το οποίο είναι συνεκτικό και ακυκλικό ονομάζεται *δένδρο*.

Δάσος:

Ένα μη συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται *δάσος*.
Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δένδρα.

Φύλλο:

Κορυφή δένδρου με βαθμό 1.

Λήμμα 5.1:

Έστω ένα δένδρο T . Τότε, $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Απόδειξη :

- Γνωρίζουμε ότι: Εάν ένα γράφημα G είναι συνεκτικό, τότε $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

$$\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)| - 1 \quad (1) \text{ [Γιατί το } T \text{ είναι συνεκτικό.]}$$

- Έστω $|E(T)| > |V(T)| - 1 \geq |V(T)|$

$$\Rightarrow e(T) = \frac{|E(T)|}{|V(T)|} \geq \frac{|V(T)|}{|V(T)|} = 1 \quad [e(T): \text{πυκνότητα}]$$

- Γνωρίζουμε ότι: Εάν $e(G) \geq q$ τότε το G περιέχει κύκλο(υς).
 $\Rightarrow T$ περιέχει κύκλο(υς). *Άτοπο.*

$$\Rightarrow |E(T)| \leq |V(T)| - 1 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow |E(T)| = |V(T)| - 1$$



Λήμμα 5.2:

Κάθε δένδρο T με $|V(T)| \geq 2$ έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.

Απόδειξη :

- Έστω ότι έχει το πολύ 1 φύλλο x . Ισχύει ότι $d(x) = 1$.
- $\forall v \in V(T) \setminus x \quad d(v) \geq 2$
- $2|E(T)| = \sum_{v \in V(T)} d(v) = 1 + \sum_{v \in V(T) \setminus x} d(v) \geq 1 + 2(|V(T)| - 1)$
 $\Rightarrow 2|E(T)| \geq 2|V(T)| - 1$
 $\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)| - 1/2 \quad [|E(T)| \text{ ακέραιος}]$
 $\Rightarrow |E(T)| \geq |V(T)|$

Άτοπο, γιατί T δένδρο και $|E(T)| = |V(T)| - 1$. ■

Θεώρημα 5.3 :


Έστω απλό γράφημα T . Το T είναι δένδρο αν υπάρχει ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του T .

Απόδειξη :

⇒ Έστω \exists κορυφές $u, v \in V(T)$ που συνδέονται με 2 μονοπάτια, έστω $P_1(u, v)$ και $P_2(u, v)$.

- \exists ακμή $e = (x, y) : e \in P_1(u, v), e \notin P_2(u, v)$.
- Το $G = (P_1 \cup P_2) \setminus e$ είναι συνεκτικό.
⇒ $\exists (x, y)$ -μονοπάτι P στο G
⇒ Το $P \cup \{e\}$ είναι κύκλος. **Άτοπο**, αφού το T είναι δένδρο. ✓

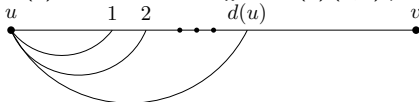
⇐ Έστω \exists ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του T . ⇒ Το T είναι συνεκτικό. Θα δείξω ότι το T δεν έχει κύκλο. [Με επαγωγή στο $|V(T)|$.]

Βάση: $|V(T)| = 2$  Χωρίς κύκλο. ✓

Ε.Υ. Κάθε γράφημα T με $|V(T)| < k, k \geq 3$, για το οποίο \exists ακριβώς 1 μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του είναι δένδρο.

E.B. Έστω γράφημα T με $|V(T)| = k$.

- Έστω ένα μεγιστοτικό (u, v) -μονοπάτι $P(u, v)$ του T .
- Κάθε γείτονας του $u \in P(u, v)$, διαφορετικά το $P(u, v)$ δεν είναι μεγιστοτικό.
- Έστω ότι $d(u) \geq 2$. Τότε, \exists τουλάχιστον $d(u)$ (u, v) -μονοπάτια.



Άτοπο γιατί το (u, v) -μονοπάτι είναι μοναδικό.

$\Rightarrow d(u) = 1$. [Όμοια $d(v) = 1$.]

[Μόλις είδαμε μια εναλλακτική απόδειξη για το Λήμμα 5.2]

- Έστω w ο γείτονας της u στο γράφημα T .
- Η διαγραφή του u από το T δεν επηρεάζει τα υπόλοιπα μονοπάτια του T .
- $T \setminus \{u\}$ είναι δένδρο. [Από E.Y.]
- Στο $T \setminus \{u\}$ η προσθήκη της κορυφής u και της ακμής (w, u) δεν δημιουργεί κύκλο, ενώ, το νέο γράφημα είναι το T .
- Το T δεν έχει κύκλο. $\xrightarrow{\text{Το } T \text{ είναι συνεκτικό}}$ Το T είναι δένδρο. ✓

Θεώρημα 5.4 [Χαρακτηρισμός των δένδρων]:

Έστω ένα γράφημα T με $|V(T)| \geq 2$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i. Το T είναι συνεκτικό και χωρίς κύκλους.
[Ο ορισμός του δένδρου.]
- ii. Το T είναι συνεκτικό και $|E(T)| = |V(T)| - 1$.
- iii. Το T δεν έχει κύκλους και $|E(T)| = |V(T)| - 1$.
- iv. Για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V(T) \exists$ ακριβώς 1 (u, v) -μονοπάτι.
- v. Το T είναι συνεκτικό και κάθε ακμή του είναι γέφυρα.

Απόδειξη [Να λυθεί σαν άσκηση] :

Σημείωση: Η ισοδυναμία $i. \Leftrightarrow iv.$ είναι το Θεώρημα 5.3.

Θεώρημα 5.5 :

Έστω γράφημα G με $|V(G)| \geq 1$. Τότε το G περιέχει ως υπογράφημά του κάθε δένδρο T με $k \leq \delta(G)$ ακμές.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το k , δηλ., το μέγεθος του δένδρου.] :

Βάση $k = 0$: Το δένδρο αποτελείται από 1 κορυφή.

Το T είναι υπογράφημα του G . ✓

E.Y. Έστω ότι $\forall 0 \leq k' < k$ κάθε δένδρο με k' ακμές είναι υπογράφημα κάθε γραφήματος G με $\delta(G) \geq k$ [$> k'$].

E.B. Θα δείξουμε ότι το αυθαίρετο δένδρο με $k' + 1$ ακμές είναι υπογράφημα κάθε γραφήματος G με $\delta(G) \geq k$ [$\geq k' + 1$].

- Έστω αυθαίρετο δένδρο T με $k' + 1$ ακμές.
- Έστω αυθαίρετο γράφημα G με $\delta(G) \geq k' + 1$.
- $k' \geq 0 \Rightarrow k' + 1 \geq 1 \Rightarrow$ Το T έχει ≥ 1 ακμές. \Rightarrow Το T έχει τουλάχιστον 2 φύλλα.
- Έστω u ένα φύλλο του T και w η γειτονική κορυφή του.
- Έστω το $T' = T \setminus \{u\}$. Το T' είναι δένδρο με k' ακμές και $|V(T')| = k' + 1$.

$$d_{T'}(w) \leq k' \quad (3)$$

- $\delta(G) \geq k' + 1 > k' \xRightarrow{\text{E.Y.}}$ Το T' είναι υπογράφημα του G .
 - Έστω w_G η κορυφή του G στην οποία αντιστοιχεί ο κόμβος w του $T' = T \setminus \{u\}$.
 - $\delta(G) \geq k' + 1 \Rightarrow d_G(w_G) \geq k' + 1$.
- \Rightarrow Υπάρχει μια κορυφή γειτονική της w_G στο G στην οποία δεν έχει αντιστοιχηθεί καμία γειτονική του w στο T' .
- Έστω u_G η κορυφή αυτή.
 - Επεκτείνουμε την αντιστοίχιση του $T \setminus \{u\}$ στο G αντιστοιχίζοντας την κορυφή $u \in V(T)$ στην $u_G \in V(G)$.
 - Άρα, το T είναι υπογράφημα του G . ✓



Σκελετικά δένδρα

Σκελετικό δένδρο [Spanning Tree]:

Έστω γράφημα G . Ένα παραγόμενο υπογράφημα T του G το οποίο είναι δένδρο ονομάζεται **σκελετικό δένδρο** του G .

Σημείωση: Ένα παραγόμενο υπογράφημα του G δημιουργείται με την διαγραφή ακμών από το G .

Δένδρο με ετικέτες:

Δένδρο T όπου σε κάθε κορυφή $u \in V(T)$ έχει αντιστοιχηθεί διακριτός ακέραιος από το σύνολο $\{1, 2, \dots, |V(T)|\}$. Έστω $\ell : v(T) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(T)|\}$ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ετικέτες στις κορυφές του T .

- Η ℓ είναι 1-1 και επί.
- Ένα δένδρο T με συνάρτηση "ετικετών" ℓ συμβολίζεται με $\langle T, \ell \rangle$.

Ισομορφισμός δένδρου με ετικέτες:

Δύο δένδρα $\langle T_1, \ell_1 \rangle$ και $\langle T_2, \ell_2 \rangle$ είναι **ισόμορφα** αν υπάρχει ισομορφισμός $\sigma : T_1 \rightarrow T_2$ τέτοιος ώστε:

$$\forall (u, v) \in E(T_1) (\sigma(u), \sigma(v)) \in E(T_2) \text{ and } \forall v \in V(T_1) \ell_1(v) = \ell_2(\sigma(v))$$

Ακολουθία Prüfer:

Μία ακολουθία $n - 2$ όρων από τους φυσικούς αριθμούς $\{1, 2, \dots, n\}$ ονομάζεται *ακολουθία Prüfer τάξης n* .

Παράδειγμα: Η $\langle 5, 4, 4, 2, 2, 3, 7 \rangle$ είναι μια ακολουθία Prüfer βαθμού 9.

Θεώρημα 5.6 [Cayley]:


Ο αριθμός των διαφορετικών δένδρων με ετικέτες είναι n^{n-2} όπου n ο αριθμός των κορυφών του δένδρου.

Απόδειξη :

- Έστω \mathcal{T}_n το σύνολο των δένδρων με ετικέτες τα οποία έχουν n κορυφές.
- Έστω \mathcal{W}_n το σύνολο των ακολουθιών Prüfer τάξης n .
- Θα κατασκευάσουμε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\phi : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{W}_n$.
- Η ϕ ονομάζεται κώδικας Prüfer.
- Ισχύει ότι: $|\mathcal{W}_n| = n^{n-2}$.

Αναδρομικός ορισμός του κώδικα Prüfer $\phi : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{W}_n$ [ως προς το n].

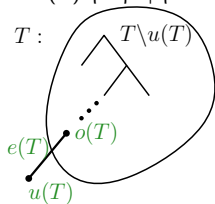
- Υποθέτουμε ότι οι κορυφές του V έχουν ονόματα/ετικέτες στο σύνολο $\{1, \dots, n\}$.

Βάση: $n = 2$: \exists μοναδικό δένδρο T 

- Ορίζουμε $\phi(T) = \epsilon$. [Η κενή λέξη.] • $n^{n-2} = 2^0 = 1$, $|\mathcal{W}_2| = |\{\epsilon\}| = 1$. ✓

Αναδρομικός ορισμός:

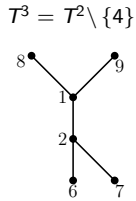
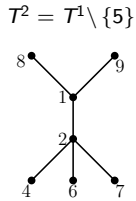
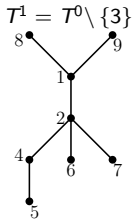
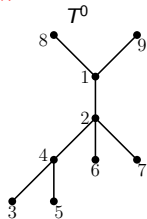
- Έστω $u(T)$ το φύλλο του T με την μικρότερη ετικέτα.
- Έστω $e(T)$ η ακμή του T που προσπίπτει στη $u(T)$.
- Έστω $o(T)$ η κορυφή στο άλλο άκρο της $e(T)$.



- Το $T \setminus u(T)$ έχει $n - 1$ κορυφές.
- $\phi(T) = \langle o(T), \phi(T \setminus u(T)) \rangle$

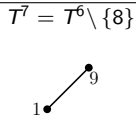
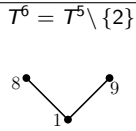
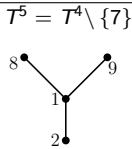
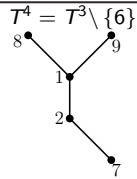
- Πρέπει να δείξουμε ότι όντως έχουμε ορίσει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Παράδειγμα:



$\langle 4, \phi(T^1) \rangle \rightarrow \langle 4, \phi(T^2) \rangle \rightarrow \langle 2, \phi(T^3) \rangle \rightarrow \langle 2, \phi(T^4) \rangle \rightarrow \boxed{A}$

$\langle 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1 \rangle \leftarrow \langle 4, 2, 2, 2, 1, 1 \rangle \leftarrow \langle 2, 2, 2, 1, 1 \rangle \leftarrow \langle 2, 2, 1, 1 \rangle \leftarrow \boxed{B}$



$\boxed{A} \rightarrow \langle 2, \phi(T^5) \rangle \rightarrow \langle 1, \phi(T^6) \rangle \rightarrow \langle 1, \phi(T^7) \rangle \rightarrow \epsilon$

$\boxed{B} \leftarrow \langle 2, 1, 1 \rangle \leftarrow \langle 1, 1 \rangle \leftarrow \langle 1 \rangle \leftarrow$

Λήμμα 5.7:

Για οποιοδήποτε δένδρο T η κορυφή u είναι φύλλο αν η u δεν εμφανίζεται στον κωδικό $\phi(T)$.

Απόδειξη :

“ \Rightarrow ” Έστω ότι η u είναι φύλλο και έστω ότι εμφανίζεται στον κωδικό $\phi(T)$.

- Η u προστέθηκε στο $\phi(T)$ κατά την διάρκεια της κατασκευής του.
- \Rightarrow Η u ήταν γειτονική προς το ελάχιστο φύλλο $u(H)$ του υποδένδρου H [του βήματος στο οποίο προστέθηκε] το οποίο είχε μέγεθος > 2 [διαφορετικά δεν θα είχε προστεθεί καμία κορυφή].
- \Rightarrow Η u δεν είναι φύλλο στο υποδένδρο H .
- Αλλά, η u είναι φύλλο στο T , άρα είναι φύλλο και στο H . *Άτοπο.* ✓

“ \Leftarrow ” Έστω ότι η u δεν εμφανίζεται στο $\phi(T)$ και έστω ότι η u δεν είναι φύλλο του T .

- Η u δεν είναι φύλλο $\Rightarrow d(u) \geq 2 \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον 2 προσπίπτουσες στην u ακμές.
- $\Rightarrow \exists$ μια ακμή που προσπίπτει στην u και το άλλο άκρο της αφαιρείται (ως φύλλο) κατά την κατασκευή του $\phi(T)$.
- Τότε από κατασκευή η u εμφανίζεται στο $\phi(T)$. *Άτοπο.* ✓

■ Λήμμα

Λήμμα 5.8:

Ο κώδικας Prüfer $\phi : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{W}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Απόδειξη [Με επαγωγή ως προς το πλήθος n των κορυφών του δένδρου.] :

Βάση: $n = 2$: Αντιστοιχίζει το μοναδικό δένδρο T με $|V(T)| = 2$ στην κενή λέξη ϵ . ✓

E.Y. Έστω ότι η ακολουθία Prüfer $\phi : \mathcal{T}_{n'} \rightarrow \mathcal{W}_{n'}$ για κάθε $n' < n$, $n \geq 3$, είναι αμφιμονοσήμαντη.

E.B. Θα δείξουμε ότι η $\phi : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{W}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

[Αμφιμονοσήμαντη: 1 – 1 και επί.]

1 – 1:

- Έστω δεν είναι 1 – 1. $\Rightarrow \exists$ διαφορετικά $T^1, T^2 \in \mathcal{T}_n : \phi(T^1) = \phi(T^2)$.
- Έστω u το ελάχιστο στοιχείο του $\{1, 2, \dots, n\}$ το οποίο δεν εμφανίζεται στον $\phi(T^1)$.
 \Rightarrow Το u είναι το ελάχιστο φύλλο των T^1 και T^2 .
- Έστω v είναι το πρώτο στοιχείο της $\phi(T^1)$.
 \Rightarrow Η ακμή $e = (u, v)$ ανήκει στο T^1 και το T^2 .
- Ορίζουμε τα $T^{1'} = T^1 \setminus \{u\}$, $T^{2'} = T^2 \setminus \{u\}$.
- Από τον ορισμό Prüfer: $\phi(T^{1'}) = \phi(T^{2'})$.
- Από E.Y., $T^{1'} = T^{2'}$.
- Από κατασκευή των $T^{1'}$, $T^{2'} \Rightarrow T^1 = T^2$. **Άτοπο.** ✓

Επί:

- Έστω μια αυθαίρετη ακολουθία Prüfer $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n-2} \rangle \in \mathcal{W}_n$.
- Έστω u είναι το ελάχιστο στοιχείο που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία.
- Από Ε.Υ. $\Rightarrow \exists$ δένδρο T' με σύνολο κορυφών το $V(T) \setminus \{u\}$:
 $\phi(T') = \langle w_2, w_3, \dots, w_{n-2} \rangle$. [Δείτε το σχόλιο που ακολουθεί.]
- Προσθέτοντας την ακμή $e = (u, w_1)$ στο T' σχηματίζουμε το δένδρο T με
 $\phi(T) = \langle w_1, \phi(T') \rangle = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n-2} \rangle$. ✓

■ Λήμμα

■ Θεώρημα Cayley

Σχόλιο: Η αυστηρή εφαρμογή της Ε.Υ. δίνει μία ακολουθία από τους αριθμούς $\{1, 2, \dots, n-1\}$ και, επομένως, εάν ένα από τα στοιχεία w_2, w_3, \dots, w_{n-2} είναι ίσο με το n , δεν μπορούμε από την Ε.Υ. να υποθέσουμε ότι παίρνουμε το δένδρο T' με ακολουθία $\phi(T') = \langle w_2, w_3, \dots, w_{n-2} \rangle$. Σε μία λιγότερη αυστηρή εφαρμογή της Ε.Υ., η ακολουθία Prüfer τάξης n μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία από $n-2$ διακριτούς αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή, οι αριθμοί μπορεί να τεθούν σε 1-1 αντιστοιχία με τους ακεραίους στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ με βάση την διάταξή τους.