

Θεωρία Γραφημάτων

6η Διάλεξη

A. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

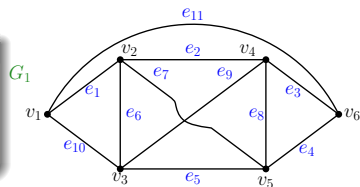
Φεβρουάριος 2022

Ευλείαν γραφήματα

Περίπατος:

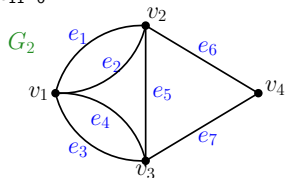
Ένας περίπατος μήκους k είναι μια ακολουθία $\pi = \langle v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k \rangle$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές του γραφήματος G έτσι ώστε $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $\forall i = 1, \dots, k$.

(v_1, v_6) -περίπατος: $v_1 e_1 v_2 e_2 v_4 e_5 v_6 e_4 v_5 e_5 v_3 e_6 v_2 e_7 v_5 e_8 v_4 e_3 v_3 e_{10} v_1 e_{11} v_6$



Περίγηση:

Ένας περίπατος με ταυτόσημες τερματικές κορυφές.



Μονοκονδυλιά:

Ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.

G_1 : $v_1 e_1 v_2 e_6 v_3 e_9 v_4 e_8 v_5$

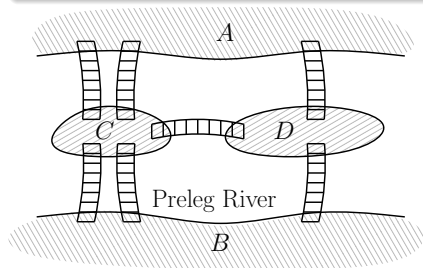
G_2 : $v_1 e_1 v_2 e_2 v_1 e_3 v_3 e_4 v_1$

Περιήγηση Euler:

Έστω γράφημα G . Μια κλειστή μονοκονδυλιά του G η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές του ονομάζεται **περιήγηση Euler** του G .

Eulerian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο έχει μια περιήγηση Euler.

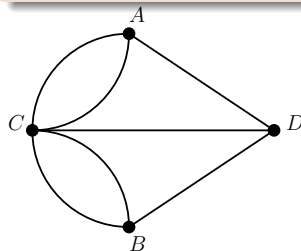


Περίπατος Euler:

Έστω γράφημα G . Μια μονοκονδυλιά του G η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές του και έχει διαφορετικές "τερματικές" κορυφές ονομάζεται **περίπατος Euler** του G .

Semi-Eulerian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο έχει έναν περίπατο Euler.



Μοντελοποίηση από Euler [1735]

Θεώρημα 6.1 [Euler]:

Έστω συνεκτικό γράφημα G . Το G είναι Eulerian γράφημα ανν κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.

Απόδειξη :

⇒

- Έστω G ένα συνεκτικό Eulerian γράφημα.
- Έστω P μια περιήγηση Euler του G .
- Ο βαθμός κάθε κορυφής μπορεί να υπολογιστεί προσθέτοντας 2 μονάδες σε κάθε κορυφή που συναντάμε κατά την περιήγηση του P .

[Μία μονάδα για την εισερχόμενη ακμή και μία για την εξερχόμενη.]

- Στα αθροίσματα λαμβάνονται υπόψιν όλες οι ακμές γιατί η περιήγηση P είναι Eulerian.
- Κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό. ✓

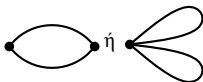
⇐ [Με επαγωγή στον αριθμό των ακμών του G .]

- Το G είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.
⇒ Ο βαθμός κάθε κορυφής ≥ 2 .
⇒ $\delta(G) \geq 2$

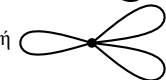
Βάση: $|E(G)| = 1$



$|E(G)| = 2$



$|E(G)| = 3$



E.Y. Κάθε συνεκτικό γράφημα G με $|E(G)| < k$ και με κορυφές άρτιου βαθμού είναι Eulerian γράφημα.

E.B. Θα δείξουμε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα με k ακμές και κορυφές άρτιου βαθμού είναι Eulerian.

- Έστω G συνεκτικό γράφημα με k ακμές και με κορυφές άρτιου βαθμού.
- $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow \text{O } G \text{ έχει κύκλο, έστω } C.$

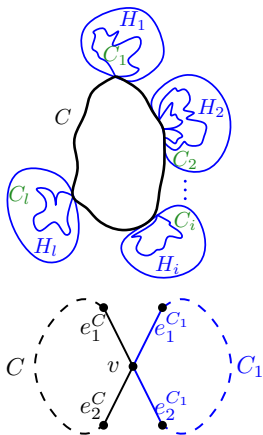
Περίπτωση 1: Ο C περιέχει k ακμές, δηλαδή όλες τις ακμές του G .

$\Rightarrow \text{O } G \text{ είναι Eulerian. } \checkmark$

Περίπτωση 2: Ο C περιέχει $< k$ ακμές

- Έστω το γράφημα G' που προκύπτει από την αφαίρεση των ακμών του κύκλου C από το G .
- Έστω H_1, H_2, \dots, H_ℓ οι συνεκτικές συνιστώσες του G' .

- Κάθε συνιστώσα H_i , $1 \leq i \leq \ell$ του G' έχει τουλάχιστον μια κορυφή κοινή με τον C .
- $|E(H_i)| < k$, $1 \leq i \leq \ell$
- Έστω C_i η περιήγηση Euler του H_i [από E.Y].
- Έστω v μια κορυφή που ανήκει στον C και την συνιστώσα H_1 .
- Έστω e_1^C (e_2^C) η ακμή του C που προηγείται της (ακολουθεί την) κορυφής v στον C .
- Έστω $e_1^{C_1}$ και $e_2^{C_1}$ η ακμή που προηγείται και ακολουθεί μια εμφάνιση της v στην C_1 .
- Ο C μπορεί να επεκταθεί ακολουθώντας, μετά την e_1^C , την $e_1^{C_1}$... την περιήγηση C_1 έως την $e_2^{C_1}$, μετά την e_2^C , ...
- Ο C επεκτείνεται ώστε να περιλάβει την H_1 .



- Με όμοιο τρόπο περιλαμβάνει διαδοχικά όλες τις συνιστώσες H_i , $1 \leq i \leq \ell$ του G' .
 - Ο C επεκτείνεται ώστε να γίνει περιήγηση που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του G .
- \Rightarrow Ο G είναι Eulerian γράφημα. ✓

Πόρισμα 6.2:

Έστω συνεκτικό γράφημα G . Το G είναι semi-Eulerian γράφημα αν έχει ακριβώς 2 κορυφές με περιττό βαθμό.

Απόδειξη :

“ \Rightarrow ” Έστω u, v οι τερματικές κορυφές του περιπάτου που περιέχει όλες τις ακμές του G .

- Με την ίδια διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος Euler προκύπτει ότι οι κορυφές u, v έχουν περιττό βαθμό ενώ όλες οι εσωτερικές κορυφές του περιπάτου έχουν άρτιο βαθμό. ✓

“ \Leftarrow ”

- Έστω το $G' = (V(G), E(G) \cup \{e = (u, v)\})$.
- Όλες οι κορυφές του G' έχουν άρτιο βαθμό.
 \Rightarrow Το G' είναι Eulerian.
 \Rightarrow Το G' έχει περιήγηση Euler P .
- $P \setminus e = (u, v)$ είναι περίπατος Euler από την u στην v . ✓



Μη αναδρομική κατασκευή περιήγησης Euler. [Αλγόριθμος Fleury - 1921]

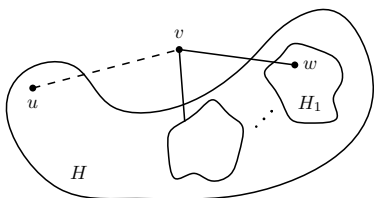
- Σχηματίζουμε περιήγηση Euler ξεκινώντας από αυθαίρετη κορυφή u και συνεχίζοντας με βάση τους κανόνες:
 - i. Διαγράφουμε από το G την ακμή που μόλις διασχίσαμε. Διαγράφουμε τις μεμονωμένες κορυφές [χωρίς βρόχους].
 - ii. Χρησιμοποιούμε μια γέφυρα μόνο όταν ο βαθμός της τρέχουσας κορυφής [στο γράφημα H που έχει προκύψει] είναι ίσος με 1.

Απόδειξη ορθότητας:

- Έστω ότι έχουμε φτάσει σε μια κορυφή v .

Περίπτωση 1: $u \neq v$.

- Στο τρέχον γράφημα H ο βαθμός των u, v είναι περιττός. Όλοι οι άλλοι βαθμοί είναι άρτιοι.
- Το H είναι συνεκτικό.
- Θα δείξουμε ότι: Η διαγραφή της επόμενης ακμής (και κορυφής, εάν χρειαστεί) δεν μετατρέπει το H σε μη συνεκτικό γράφημα.



- Έστω ότι όλες οι προσπίπτουσες στην v ακμές είναι γέφυρες, δηλαδή ο αλγόριθμος δεν μπορεί να συνεχίσει με βάση τον κανόνα ii.
 - Διαγράφοντας μια γέφυρα προκύπτει γράφημα H με δύο συνιστώσες, μια εκ των οποίων δεν περιέχει την u . Έστω ότι αυτή είναι η συνιστώσα H_1 .
 - Έστω (v, w) η γέφυρα που ενώνει την v με την H_1 .
 - Στην H_1 ο βαθμός της w είναι περιττός.
- ⇒ Υπάρχει περιττός αριθμός κορυφών στην H_1 με περιττό βαθμό.
- Πριν τη διαγραφή της (v, w) οι κορυφές περιττού βαθμού στο H είναι άρτιες στο πλήθος [η u , η v και οι περιττού βαθμού κορυφές του H_1].
 - **Άτοπο.** ⇒ Όταν εκτελώντας το βήμα ii. διαγράφουμε μια γέφυρα, αυτή είναι η μοναδική που προσπίπτει στην κορυφή v , και άρα η κορυφή v έχει βαθμό 1. ✓

Περίπτωση 2: $u = v$.

Περίπτωση 2α: Υπάρχουν ακόμα ακμές που προσπίπτουν στην u .

- Συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση 1.
Ο βαθμός της u είναι άρτιος. Διαγράφοντας μια προσπίπτουσα στη u ακμή δημιουργώ 2 κορυφές περιττού βαθμού. ✓

Περίπτωση 2β: Η u έγινε απομονωμένη κορυφή [πιθανώς με βρόχους].

- Το H είναι κενό. Δηλαδή έχουμε κατασκευάσει μια περιήγηση Euler.
Απόδειξη :

Έστω ότι δεν είναι κενό, τότε αποτελείται από μία τουλάχιστον συνεκτική συνιστώσα.

Αυτή αποκόπηκε όταν ακολουθήσαμε, έστω, την ακμή $e = (x, y)$ η οποία ήταν γέφυρα, και έστω η κορυφή x ανήκει στην συνιστώσα αυτή.

Τότε, ή στην x προσπίπτουν ≥ 2 γέφυρες (αδύνατο) ή δεν εφαρμόσαμε σωστά το βήμα ii. **Άτοπο.** ✓ ■

Θεώρημα Euler για κατευθυνόμενα γραφήματα.

- Κάθε ακμή $e = (u, v)$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών.
- Η u είναι η αφετηρία και η v είναι η κατάληξη της e .

Συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα:

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό** όταν το γράφημα που προκύπτει από την αντικατάσταση κάθε κατευθυνόμενης ακμής $e = (u, v)$ από την αντίστοιχη μη-κατευθυνόμενη (u, v) είναι συνεκτικό.

Ισχυρά-συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα:

Κάθε κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο κάθε ζεύγος κορυφών u, v ενώνεται με ένα κατευθυνόμενο (u, v) -μονοπάτι ονομάζεται **ισχυρά-συνεκτικό γράφημα**.

- $d^+(u)$: Έξω-βαθμός κορυφής u .
- $d^-(u)$: Έσω-βαθμός κορυφή u .
- $\sum_{u \in \mathcal{V}(G)} d^+(u) = \sum_{u \in \mathcal{V}(G)} d^-(u) = |E(G)|$

Θεώρημα 6.3 [Euler]:

Ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα G είναι Eulerian αν $d^+(u) = d^-(u)$ για κάθε κορυφή u του G .

Πόρισμα 6.4:

Κάθε κατευθυνόμενο Eulerian γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό.

Ερώτηση 6.1: Για ποιες τιμές των παραμέτρων τους είναι τα παρακάτω γραφήματα Eulerian?

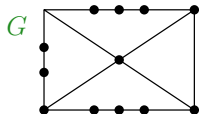
- i. K_n
- ii. $K_{m,n}$
- iii. $R_{m,n}$ [Πλέγμα]
- iv. H_r
- v. Πλήρες m -αδικό δένδρο ύψους h .

Ερώτηση 6.2: Έστω το γράφημα $G \times H$ [γινόμενο διακεκριμένων γραφημάτων]. Είναι το $G \times H$ Eulerian αν τα G, H είναι Eulerian?

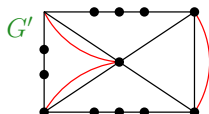
Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου. [Kwan - 1962]

Πρόβλημα Κινέζου ταχυδρόμου:

Έστω γράφημα G . Να βρεθεί περιήγηση W η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του G και έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.



Μη-Eulerian

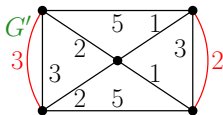
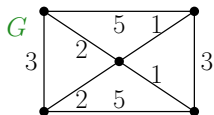


Eulerian

Εκδοχή με βάρη:

Έστω γράφημα G με βάρη. Να βρεθεί περιήγηση W η οποία διέρχεται από κάθε ακμή του G και το βάρος $w(W)$ της περιήγησης είναι το μικρότερο δυνατό.

$$w(G): w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e) \text{ [ανάλογα με τον αριθμό των εμφανίσεων της ακμής]}$$

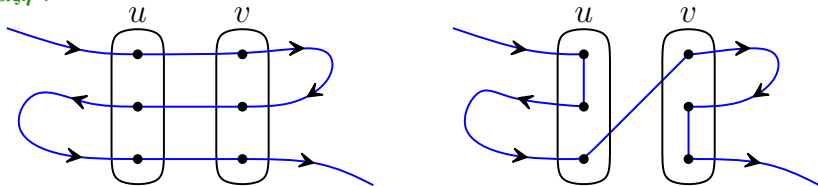


- G Eulerian \Rightarrow Μια περιήγηση Euler είναι η βέλτιστη λύση.

Λήμμα 6.5:

Έστω μη-Eulerian γράφημα G . Εάν μια ακμή του G εμφανίζεται > 1 φορές στην περιήγηση που επιλύει το πρόβλημα του κινέζου ταχυδρόμου τότε εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές.

Απόδειξη :



- Πάντα μπορώ, εάν έχω 3 τουλάχιστον εμφανίσεις της ίδιας ακμής σε μια περιήγηση, να απαλείψω τις δύο πρώτες, τροποποιώντας την περιήγηση.
- Μη-βέλτιστη περιήγηση. *Άτοπο.*



``Πράσινες ακμές / μονοπάτια``: Έστω μια βέλτιστη περιήγηση W ενός μη-Eulerian γραφήματος G . Χρωματίζουμε τις ακμές που εμφανίζονται για 2η φορά **πράσινες**.

- Το υπογράφημα με τις πράσινες ακμές είναι άκυκλικό.

[Διαγράφοντας τις ακμές ενός πράσινου κύκλου παίρνω Eulerian γράφημα με περιήγηση μικρότερου κόστους.]

- Οι πράσινες ακμές ορίζουν ένα σύνολο από ξένα ως προς τις ακμές μονοπάτια που αρχίζουν και τελειώνουν σε κορυφές περιττού βαθμού.

[Έστω u και v δύο φύλλα ενός πράσινου δένδρου. Αφαίρεσε το (u, v) μονοπάτι του πράσινου δένδρου. Συνέχισε το σχηματισμό των μονοπατιών αναδρομικά.]

- Έστω $2k$ οι κορυφές περιττού βαθμού. Τότε ορίζονται ακριβώς k πράσινα (ξένα ως προς τις ακμές) μονοπάτια με τερματικά σημεία τις κορυφές περιττού βαθμού.

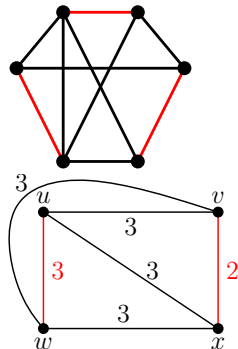
[Κάθε φύλλο του ``εναπομείναντος`` πράσινου δένδρου έχει περιττό βαθμό στο G .]

Τέλειο ταίριασμα:

Έστω γράφημα $G = (V, E)$ όπου $V = 2k$, $k \geq 1$. Ένα υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$: $|M| = k$ ονομάζεται **τέλειο ταίριασμα** εάν τα άκρα των ακμών του M "καλύπτουν" όλες τις κορυφές του V .

Τέλειο ταίριασμα ελάχιστου κόστους:

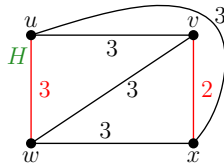
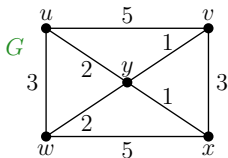
Για γραφήματα με βάρη.



- Έστω γράφημα με βάρη G .

Έστω το πλήρες γράφημα με βάρη H όπου:

- Κορυφές του H είναι οι κορυφές περιττού βαθμού του G .
- Το βάρος κάθε ακμής (u, v) του H ισούται με το βάρος του ελάχιστου (u, v) -μονοπατιού του G .



Λήμμα 6.6:

Το κόστος των πράσινων μονοπατιών μιας βέλτιστης περιήγησης που επιλύει το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου είναι ίσο με το κόστος ενός τέλειου ταιριάσματος ελαχίστου κόστους του πλήρους γραφήματος H που αντιστοιχεί στο G .

Απόδειξη :

- Τα πράσινα μονοπάτια αντιστοιχούν σε ένα τέλειο ταιρίασμα.
- Τα ελάχιστα μονοπάτια που αντιστοιχούν σε ένα τέλειο ταιρίασμα είναι ξένα ως προς τις ακμές μεταξύ τους. [Δες Λήμμα 6.7.]
- Εάν τα μονοπάτια του τέλειου ταιριάσματος έχουν μικρότερο βάρος από τα πράσινα μονοπάτια τότε η περιήγηση ελαχίστου κόστους δεν είναι ελάχιστη. **Άτοπο.** ■

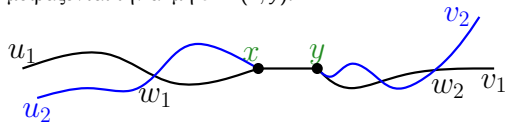
Λήμμα 6.7:

Σε ένα ελαχίστου κόστους τέλει ταίριασμα των κορυφών περιττού βαθμού του G όπου τα βάρη αντιστοιχούν στο κόστος των ελαχίστων μονοπατιών μεταξύ των κορυφών αυτών, δεν υπάρχουν 2 ελάχιστα μονοπάτια στο ταίριασμα με κοινή ακμή.

Σημείωση: Ισχύει μόνο για θετικά βάρη ακμών.

Απόδειξη :

- Έστω ότι υπάρχουν 2 τέτοια ελάχιστα μονοπάτια $P_1(u_1, v_1)$ και $P_2(u_2, v_2)$ τα οποία μοιράζονται την ακμή $e = (x, y)$.



- Έστω w_1 η πρώτη κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών.
- Έστω w_2 η τελευταία κοινή κορυφή των δύο μονοπατιών.
- $w_1 \neq w_2$ λόγω της ύπαρξης της $e = (x, y)$.
- Τα μονοπάτια $P_1(u_1, w_1) \cdot P_2(w_1, u_2)$ και $P_1(v_1, w_2) \cdot P_2(w_2, v_2)$ έχουν μικρότερο συνολικό μήκος από τα $P_1(u_1, v_1)$ και $P_2(u_2, v_2)$, και αποτελούν ένα ταίριασμα των u_1, u_2, v_1, v_2 και είναι ξένα μεταξύ τους (ως προς τις ακμές). **Άτοπο.**

Λήμμα 6.8:

Έστω $2k$ οι κορυφές περιττού βαθμού ενός γραφήματος G . Τότε υπάρχουν $\prod_{i=1}^k (2i - 1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ διακριτά τέλεια ταιριάσματα.

Απόδειξη :

- Το 1ο ταιρίασμα φτιάχνεται με $2k - 1$ τρόπους.
- Το 2ο ταιρίασμα φτιάχνεται με $2k - (2 \cdot 2 - 1)$ τρόπους.
- Το i -οστό ταιρίασμα φτιάχνεται με $2k - (2i - 1)$ τρόπους.
- Συνολικά: $\prod_{i=1}^k 2k - (2i - 1) = (2k - 1)(2k - 3) \dots 3 \cdot 1 = \prod_{i=1}^k (2i - 1)$
 $= \frac{2k(2k-1)2(k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^k(k(k-1)(k-2)\dots 1)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$
- Αλλά, $\prod_{i=1}^k (2i - 1) = \frac{2k(2k-1)2(k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^k(k(k-1)(k-2)\dots 1)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ ■

Αλγόριθμος εύρεσης περιήγησης Κινέζου ταχυδρόμου

Είσοδος: Γράφημα G με βάρη.

Εξοδος: Περιήγηση W ελαχίστου κόστους που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του $E(G)$.

- Βήμα-1:**
- V_{odd} : Κορυφές περιττού βαθμού του $V(G)$.
 - Κατασκεύασε πλήρες γράφημα με σύνολο κορυφών του V_{odd} όπου το βάρος $w(u, v)$ κάθε ακμής (u, v) , $u, v \in V_{odd}$, είναι ίσο με το βάρος ενός ελαχίστου (u, v) -μονοπατιού $P(u, v)$ του G .
- Βήμα-2:**
- Έστω $M = \{e_i = (u_i, v_i) : i = 1, \dots, k, 2k = |V_{odd}|\}$ ένα ελάχιστο τέλει ταίριασμα του πλήρους γραφήματος και $P_i(u_i, v_i)$ το μονοπάτι ελαχίστου μήκους του G που αντιστοιχεί στην ακμή $e_i = (u_i, v_i)$ του ταίριασματος.
- Βήμα-3:** $G' = (V(G), E')$ όπου $E' = E \bigcup_{i=1}^k E(P_i(u_i, v_i))$.
- Βήμα-4:** Υπολόγισε περιήγηση W στο Eulerian γράφημα G' . Η W επιλύει το πρόβλημα του κινέζου ταχυδρόμου.

Ορθότητα: Βάσει των προηγούμενων λημμάτων.