Θεωρία Γραφημάτων
7η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Hamiltonian γραφήματα

Κύκλος Hamilton:

Έστω γράφημα G. Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές του G ονομάζεται ***κύκλος Hamilton***.

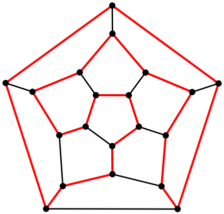
Hamiltonian γράφημα:

Ένα γράφημα το οποίο περιέχει κύκλο Hamilton ονομάζεται ***Hamiltonian γράφημα***.

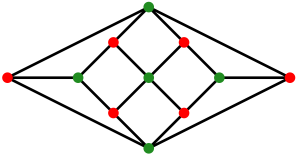
Μονοπάτι Hamilton:

Έστω γράφημα G. Ένα μονοπάτι του G το οποίο διέρχεται από όλες τις κορυφές του G ονομάζεται ***μονοπάτι Hamilton***.

- Sir William Rowan Hamilton[1857].
  - Δωδεκάεδρο.
  - 20 κορυφές.
  - 3-κανονικό.



Παράδειγμα: Το γράφημα Herschel.



- 11 κορυφές.
- Διμερές.

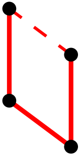
- Το γράφημα Herschel δεν είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :

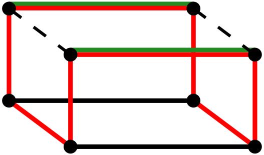
> Εάν ήταν Hamiltonian, ο κύκλος Hamilton θα είχε 11 ακμές. Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί οι κύκλοι σε κάθε διμερές γράφημα έχουν άρτιο αριθμό ακμών. ■

Παράδειγμα: Ο υπερκύβος r-διαστάσεων H_r, $r \geq 2$ είναι Hamiltonian.

- H_2



- H_3



- H_r Αναδρομική κατασκευή …

Θεώρημα 7.1 :

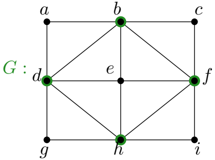
Έστω συνεκτικό γράφημα G. Εάν το G είναι Hamiltonian, τότε για κάθε μη-κενό υποσύνολο S του $V(G)$ ισχύει ότι $cc(G-S) \leq |S|$, όπου $cc()$ συμβολίζει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος.

Απόδειξη :

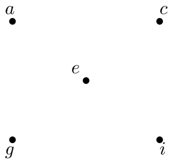
- Έστω C ένας Hamiltonian κύκλος του G.
  - Για κάθε μη-κενό $S \subset V(G)$ ισχύει ότι: $\boxed{cc(C-S) \leq |S| \qquad (1)}$
  - Η ισότητα ισχύει για κάποιο σύνολο S, στην παρακάτω περίπτωση:
    - Έστω $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ όπου οι κορυφές του S δεν είναι διαδοχικές στον κύκλο C. • Έστω C_i, $0 \leq i \leq k$, το τμήμα του κύκλου C ανάμεσα στις κορυφές v_i και $v_{(i+1) \bmod (k+1)}$. • Δεν υπάρχει ακμή του G η οποία ενώνει δύο διαφορετικά τμήματα C_i και C_j του κύκλου C.
  - Το $C-S$ είναι παραγόμενο υπογράφημα του $G-S$.

  $\Rightarrow cc(G-S) \leq cc(C-S)$
  - Από (1) $\Rightarrow cc(G-S) \leq |S|$. ■
- Το Θεώρημα 7.1 περιγράφει μια ΑΝΑΓΚΑΙΑ συνθήκη για να είναι ένα γράφημα Hamiltonian.

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα δεν είναι Hamiltonian



$\overset{S=\{b,c,f,h\}}{\Longrightarrow}$
$G-S$



- Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1, για $S = \{b, c, f, h\}$ πρέπει να ισχύει ότι $cc(G - S) \leq |S| = 4$.
- Αλλά, $cc(G - S) = 5$. $\Rightarrow$ Το γράφημα G δεν είναι Hamiltonian.

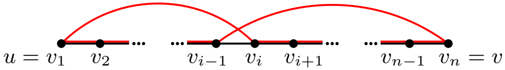
Θεώρημα 7.2 *[Dirac-1952]*:

Έστω G ένα απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη *[Με απαγωγή σε άτοπο.] :*

- Έστω G ένα μεγιστοτικό (maximal) μη-Hamiltonian απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$.
- Το G δεν είναι πλήρες [γιατί $|V(G)| \geq 3$].

• Έστω u, v δύο μη γειτονικές κορυφές του G. • $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian γιατί το G είναι μεγιστοτικό μη-Hamiltonian γράφημα. • Λόγω του ότι το G είναι μη-Hamiltonian, κάθε Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u, v)$ περιέχει την ακμή (u, v). • Έστω $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$, $n = |V(G)|$, ένας Hamiltonian κύκλος του $G \cup (u, v)$. • Ο G έχει Hamiltonian μονοπάτι $P : u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ με άκρα τις κορυφές u και v. • Όλοι οι γείτονες των u και v ανήκουν στο P.



• Υπάρχει κορυφή v_i, $i \geq 3$: $(u, v_i) \in E(G)$ και $(v_{i-1}, v) \in E(G)$.
[Εάν δεν υπήρχε, τότε για κάθε γείτονα του u θα υπήρχε μια διακριτή κορυφή με την οποία ο v δεν είναι ενωμένος. Λόγω του ότι $d(u) \geq \frac{n}{2}$, ο v θα είχε βαθμό $d(v) \leq (n-1) - d(u) \leq (n-1) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - 1$. ***Άτοπο,*** γιατί $d(v) \geq \frac{n}{2}$.] • Ο κύκλος $v_1 v_2 \ldots v_{i-1} v_n v_{n-1} \ldots v_{i+1} v_i v_1$ είναι Hamiltonian κύκλος του G. • ***Άτοπο***, γιατί ο G είναι μη Hamiltonian από την υπόθεση. ∎

Θεώρημα 7.3 *[Ore-1960]*:

Έστω G ένα απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$ και για κάθε ζεύγος $u, v \in V(G)$ μη γειτονικών κορυφών ισχύει ότι $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

***Απόδειξη** [Όμοια με αυτή του Θεωρήματος του Dirac.] :*

- Το G είναι συνεκτικό.

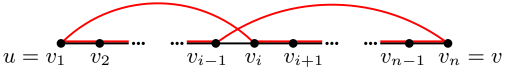
[Εάν δεν ήταν, έστω v_1 και v_2 δύο κορυφές σε διαφορετικές συνιστώσες του. Τότε $d(v_1) + d(v_2) \leq |V(G)| - 2$. ***Άτοπο.***]

- Έστω G ένα μεγιστοτικό μη-Hamiltonian γράφημα για το οποίο ισχύει ότι $|V(G)| \geq 3$ και $\forall u, v : (u, v) \notin E(G), d(u) + d(v) \geq |V(G)|$.
- $|V(G)| \geq 3 \Rightarrow$ Το G δεν είναι πλήρες γράφημα.

$\Rightarrow$ Υπάρχουν $u, v \in V(G) : (u, v) \notin E(G)$ • $G \cup \{u, v\}$ είναι Hamiltonian.

$\Rightarrow$ Υπάρχει Hamiltonian μονοπάτι $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$, $n = |V(G)|$, στον G.

- $d(u) + d(v) \geq |V(G)| \Rightarrow \max\{d(u), d(v)\} \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Έστω $d(u) \geq \frac{|V(G)|}{2}$.
- Όλοι οι γείτονες των u και v ανήκουν στο μονοπάτι.



- Υπάρχει κορυφή v_i, $i \geq 3$: $(u, v_i) \in E(G)$ και $(v_{i-1}, v) \in E(G)$.

[Εάν δεν υπήρχε, τότε για κάθε γείτονα του u θα υπήρχε μια κορυφή με την οποία δεν γειτονεύει ο v. Τότε $d(v) \leq (n-1) - d(u) \Rightarrow d(v) + d(u) \leq n - 1$. ***Άτοπο.***]

- Ο κύκλος $v_1 v_2 \ldots v_{i-1} v_n v_{n-1} \ldots v_{i+1} v_i v_1$ είναι hamiltonian κύκλος στο G.

Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι ο G είναι μη-Hamiltonian. ■

Σημείωση: Το Θεώρημα του Dirac μπορεί να εξαχθεί ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Ore.

Θεώρημα 7.4 *[Bondy, Chvatal-1974]*:

Έστω απλό γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$ και έστω u, v μη γειτονικές κορυφές του με $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$. Τότε, το G είναι Hamiltonian ανν το $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :

"$\Rightarrow$" Προφανές ✓

"$\Leftarrow$"

Έστω ότι το $G \cup (u, v)$ είναι Hamiltonian αλλά το G όχι. Τότε η ίδια απόδειξη με το θεώρημα του Dirac [ή του Ore] κατασκευάζει Hamiltonian κύκλο για το G και οδηγεί σε ***άτοπο***. ✓ ■

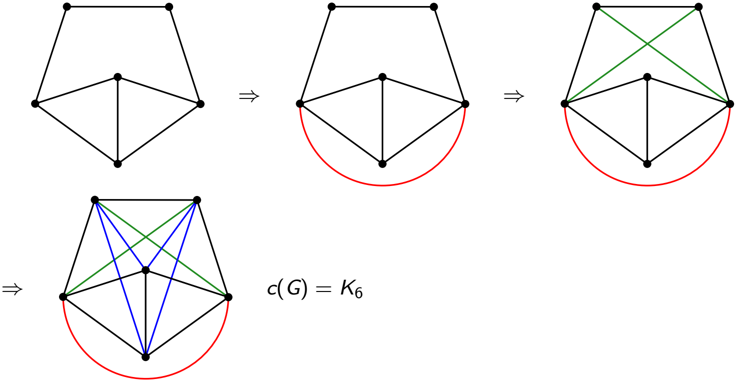
Σημείωση: Το Θεώρημα του Ore μπορεί να εξαχθεί ως συνέπεια του Θεωρήματος των Bondy-Chvatal.

- Εάν όλες οι μη γειτονικές κορυφές έχουν άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$ θα καταλήξουμε στο ότι G είναι Hamiltonian $\Leftrightarrow K_{|V(G)|}$ είναι Hamiltonian το οποίο ισχύει.

Επέκταση (closure) ως προς το άθροισμα βαθμών:

Έστω το γράφημα G. Το γράφημα $c(G)$ που σχηματίζεται όταν ενώσουμε αναδρομικά ζεύγη μη γειτονικών κορυφών που έχουν άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$ έως ότου δεν υπάρχουν τέτοια ζεύγη κορυφών, ονομάζεται ***επέκταση του ως προς το άθροισμα βαθμών***.

Παράδειγμα:



$c(G) = K_6$

Θεώρημα 7.5 :

Έστω γράφημα G. Η επέκταση $c(G)$ (ως προς το άθροισμα βαθμών) του G είναι καλώς ορισμένη.

Απόδειξη :

- Έστω G_1 και G_2 δύο γραφήματα που προκύπτουν προσθέτοντας αναδρομικά ακμές μεταξύ μη γειτονικών κορυφών με άθροισμα βαθμών $\geq |V(G)|$. • Θα δείξουμε ότι $G_1 = G_2$. • Έστω $S_1 = e_1^1 e_2^1 \ldots e_k^1$ η ακολουθία ακμών που παράγει από το G το G_1.
Έστω $S_2 = e_1^2 e_2^2 \ldots e_\ell^2$ η ακολουθία ακμών που παράγει από το G το G_2 • Θα δείξουμε ότι $\left\{e_1^1, e_2^1, \ldots, e_k^1\right\} \subseteq E(G_2)$ και $\left\{e_1^2, e_2^2, \ldots, e_\ell^2\right\} \subseteq E(G_1)$. • Έστω $e_i^1 = (u, v)$ η πρώτη ακμή της S_1 που δεν ανήκει στο $E(G_2)$. • Σχηματίζουμε το γράφημα $H = G \cup \left\{e_1^1, \ldots, e_{i-1}^1\right\}$.

  - $H \subset G_1$
  - $d_H(u) + d_H(v) \geq |V(G)|$ [Από τον ορισμό του G_1.]

- $H \subset G_2$ [Γιατί όλες οι ακμές $e_1^1, e_2^1, \ldots, e_{i-1}^1$ ανήκουν στο G_2.]

  - $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) < n$ [Γιατί $e_i^1 = (u, v) \notin E(G_2)$.]

  Άτοπο.

- Άρα, κάθε ακμή της S_1 ανήκει στο G_2 και, όμοια, κάθε ακμή της S_2 ανήκει στο G_1. • Άρα $G_1 = G_2$. ∎

Θεώρημα 7.6 :

Έστω απλό γράφημα G. Το G είναι Hamiltonian ανν η επέκταση $c(G)$ ως προς το άθροισμα βαθμών του G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη *[Προκύπτει από το Θεώρημα 7.4 [Bondy-Chvatal].] :*

• Έστω $S = e_1 e_2 \dots e_k$ η ακολουθία ακμών που δημιουργεί την επέκταση $c(G)$ από το G. • Στο i-οστό βήμα προσθέτουμε την ακμή e_i έως ότου σχηματιστεί η επέκταση $c(G)$. ■

Πόρισμα 7.7:

Εάν η επέκταση $c(G)$ ως προς το άθροισμα βαθμών ενός γραφήματος G είναι πλήρες γράφημα, τότε το G είναι Hamiltonian.

Απόδειξη *:*

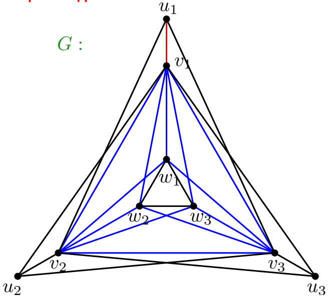
• Προκύπτει από το Θεώρημα 7.6 και το γεγονός ότι το πλήρες γράφημα K_n, $n \geq 3$ είναι Hamiltonian. ■

Θεώρημα 7.8 [Chvatal, 1972]:

Έστω απλό γράφημα G με ακολουθία βαθμών $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ όπου $n = |V(G)| \geq 3$ και $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Έστω ότι δεν υπάρχει $m \leq \frac{n}{2}$ τέτοιο ώστε $d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$. Τότε το G είναι Hamiltonian.

Σημείωση: Η ακολουθία βαθμών στο Θεώρημα 7.8 είναι αύξουσα, σε αντίθεση με τη σύμβαση που ακολουθήσαμε στο Κεφάλαιο ``Βαθμοί κορυφών'', δηλαδή φθίνουσες γραφικές ακολουθίες.

Παράδειγμα



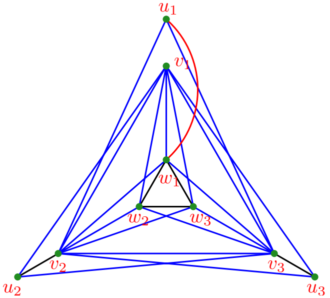
$H = \{v_1, v_2, v_3\}, |H| = 3$
$cc(G - H) = 4 > 3 = |H|$
$\xRightarrow{\text{Θ. 7.1}}$ Ο G δεν είναι Hamiltonian.

$$(\ 3\quad 3\quad 3\quad 5\quad 5\quad 5\quad 8\quad 8\quad 8\ )\quad m \leq \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor = 4$$

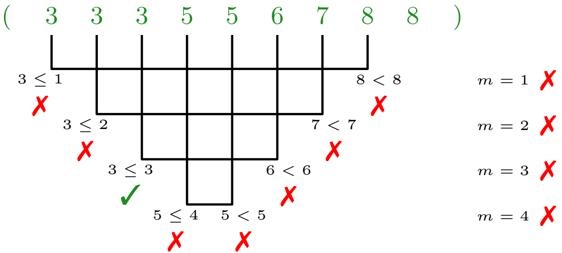
$d_3 = 3 \leq 3$ ✓ $\qquad d_{9-3} = d_6 = 5 < 6$ ✓

$\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι Hamitonian.

Παράδειγμα (Συνέχεια) $G_1 = (G - (u_1, v_1)) \cup (u_1, w_1)$



Ακολουθία βαθμών:



$\Rightarrow$ Δεν υπάρχει m, $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$: $d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$.
$\Rightarrow$ Ο G είναι Hamiltonian.

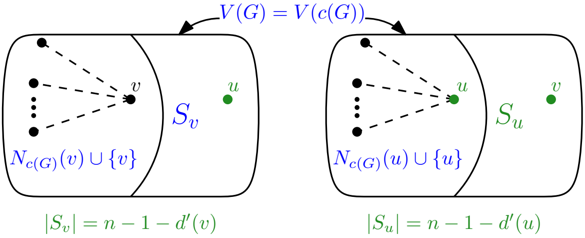
Απόδειξη *[Θεώρημα 7.8[Chvatal 1972]] :*

- Έστω γράφημα G που ικανοποιεί την υπόθεση. Από Πόρισμα 7.7 αρκεί να δείξω ότι η επέκταση $c(G)$ είναι πλήρες γράφημα.
- Συμβολίζουμε με $d'(v)$, $v \in V(G)$, το βαθμό της v στο $c(G)$.
- Έστω ότι η επέκταση $c(G)$ δεν είναι πλήρες γράφημα.
- Έστω u, v δύο μη γειτονικές στο $c(G)$ κορυφές τέτοιες ώστε:
  - $$\boxed{d'(u) \leq d'(v) \qquad (1)}$$
  - και $d'(u) + d'(v)$ μέγιστο ως προς όλα τα ζεύγη μη γειτονικών κορυφών του $c(G)$.
- $$\boxed{d'(u) + d'(v) < n \qquad (2)}$$

[Εξ ορισμού της επέκτασης $c(G)$, κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών του $c(G)$ έχει άθροισμα βαθμών $< n$.]

- $$\boxed{(1), (2) \Rightarrow d'(u) < \frac{n}{2} \qquad (3)}$$
- Έστω S_v το σύνολο των κορυφών του $c(G)$ που δεν είναι γειτονικές με την v (στο $c(G)$).

Τότε, $$\boxed{|S_v| = n - 1 - d'(v) \qquad (4)}$$



- Έστω S_u το σύνολο κορυφών του $c(G)$ που δεν είναι γειτονικές με την u (στο $c(G)$). Τότε,

$$\boxed{|S_u| = n - 1 - d'(u) \qquad (5)}$$

- Κάθε κορυφή του S_v έχει βαθμό $\leq d'(u)$.

[Εάν υπήρχε κορυφή $w \in S_v$ με $d'(w) > d'(u)$, τότε, για το ζεύγος μη γειτονικών v, w θα είχαμε: $d'(v) + d(w) > d'(u) + d(w)$. ***Άτοπο,*** γιατί διαλέξαμε τα u, v έτσι ώστε το $d'(u) + d'(v)$ να είναι το μεγαλύτερο δυνατό.]

- Κάθε κορυφή του $S_u \cup \{u\}$ έχει βαθμό $\leq d'(v)$.

[Όμοια αιτιολόγηση με προηγούμενο ισχυρισμό και χρήση της (1).]

- Θέτουμε $\boxed{d'(u) = m \qquad (6)} \Rightarrow$
- Οι κορυφές του S_v έχουν βαθμό $\leq m$.

- Πλήθος κορυφών του S_v:

$$\left.\begin{array}{ll} (4): & |S_v| = n-1-d'(v) \\ (2): & d'(v) < n - d'(u) \\ (6): & d'(u) = m \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} |S_v| & > n-1-(n-m) \\ & = n-1-n+m \\ & = m-1 \end{array}$$

$\Rightarrow |S_v| > m-1$

$\Rightarrow |S_v| \geq m$

$\Rightarrow$ Στο $c(G)$ υπάρχουν τουλάχιστον m κορυφές με βαθμό $\leq m$. (7)

- Οι κορυφές του $S_u \cup \{u\}$ έχουν βαθμό

$\leq d'(v) \overset{(2)}{<} n - d'(u) \overset{(6)}{=} n - m.$

$\Rightarrow$ Οι κορυφές του $S_u \cup \{u\}$ έχουν βαθμό $< n - m$.

- Πλήθος των κορυφών του $S_u \cup \{u\}$:

$|S_u \cup \{u\}\,| = 1 + |S_u| \overset{(5)}{=} 1 + n - 1 - d'(u) \overset{(6)}{=} n - m$

$\Rightarrow$ Στο $c(G)$ υπάρχουν τουλάχιστον $n-m$ κορυφές με βαθμό $< n-m$. (8)

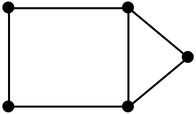
- Το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του $c(G)$. $\xRightarrow{(7)(8)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Στο } G \text{ υπάρχουν } \geq m \quad\quad \text{κορυφές με βαθμό } \leq m. \\ \text{Στο } G \text{ υπάρχουν } \geq n-m \text{ κορυφές με βαθμό } < n-m. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n-m$. ***Άτοπο,*** γιατί από (3)(6) έχουμε ότι $m < \frac{n}{2}$.

- Άρα, το $c(G)$ είναι πλήρες γράφημα.
- Το G είναι Hamiltonian. [Από το Πόρισμα 7.7.] ■

Σημείωση: Η συνθήκη του Θεωρήματος 7.8 δεν είναι αναγκαία συνθήκη για Hamiltonian γραφήματα.



Ακολουθία βαθμών:

$$(\quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad)$$

$d_1 = 2 \leq 1$ ✗ $\quad d_{5-1} = d_4 = 3 < 4$ ✓ $\quad m = 1$ ✗

$d_2 = 2 \leq 2$ ✓ $\quad d_{5-2} = d_3 = 2 < 3$ ✓ $\quad m = 2$ ✓

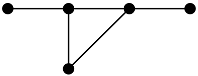
- Το G είναι Hamiltonian.
- Το G δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Θεωρήματος 7.8.
- Η επέκταση $c(G)$ του G είναι πλήρης (το K_5)!

- Έστω δύο ακολουθίες n φυσικών αριθμών $P = (p_1, \ldots, p_n)$ και $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Λέμε ότι η ακολουθία Q ***καλύπτει (ή φράσει από πάνω)*** την ακολουθία P αν ισχύει ότι $p_i \leq q_i$, $1 \leq i \leq n$.

- Έστω γραφήματα G και H με αύξουσες ακολουθίες βαθμών S_G και S_H, αντίστοιχα. Λέμε ότι ***το γράφημα H καλύπτει βαθμιαία το G*** αν $|V(G)| = |V(H)|$ και η ακολουθία βαθμών S_H καλύπτει την ακολουθία βαθμών S_G.

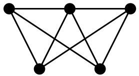
Παράδειγμα:

G :



$S_G : (1, 1, 2, 3, 3)$

H :



$S_H = (3, 3, 3, 3, 4)$

- Το H καλύπτει βαθμιαία το G.

Το γράφημα $C_{m,n}$

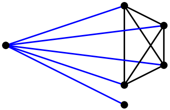
$C_{m,n} = K_m * (\bar{K}_m + K_{n-2m}) \qquad 1 \leq m < \frac{n}{2}$

``$*$'': Σύνδεση διακεκριμένων γραφημάτων.

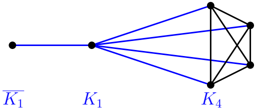
``$+$'': Ένωση διακεκριμένων γραφημάτων.

Παράδειγμα: $n = 6 \Rightarrow m = 1$ ή $m = 2$.

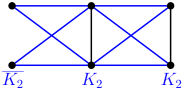
$m = 1$



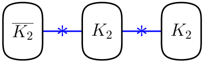
ή



$m = 2$



ή



Λήμμα 7.9:

i. $|V(C_{m,n})| = n$

ii. $|E(C_{m,n})| = \binom{n-m}{2} + m^2$

Λήμμα 7.10:

Το γράφημα $C_{m,n}$ είναι μη-Hamiltonian.

Απόδειξη *:*

- Έστω V_1 το σύνολο κορυφών του πλήρους γραφήματος K_m το οποίο ``συνδέεται'' με το $(\bar{K}_n + K_{n-2m})$. • $C_{m,n} - V_1 = \bar{K}_m + K_{n-2m}$ • $cc(C_{m,n} - V_1) = m + 1 > |V_1|$ • Το $C_{m,n}$ δεν πληρεί την αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 7.1 ώστε να είναι Hamiltonian. ■

Θεώρημα 7.11 *[Chvatal-1972]*:

Έστω απλό μη-Hamiltonian γράφημα G με $|V(G)| = n \geq 3$. Τότε, το G καλύπτεται βαθμιαία από κάποιο $C_{m,n}$.

Απόδειξη *:*

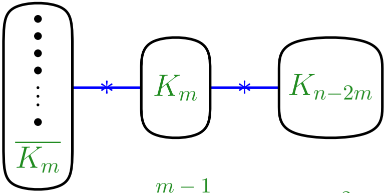
- Έστω G ένα απλό, μη-Hamiltonian γράφημα και έστω $S_G = (d_1, \ldots, d_n)$ η αύξουσα ακολουθία βαθμών του.

- G μη-Hamiltonian. $\xRightarrow{\text{Θ. 7.8}}$ $\exists m < \frac{n}{2} : d_m \leq m$ και $d_{n-m} < n - m$
- $S_G = (d_1, \ldots, d_m \leq m, \ldots, d_{n-m} < n - m, \ldots, d_n)$
- Η ακολουθία S_G καλύπτεται βαθμιαία από την ακολουθία

$$S = (\underbrace{m, \ldots, m}_{m-\text{όροι}}, \underbrace{n-m-1, \ldots, n-m-1}_{(n-2m)-\text{όροι}}, \underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{m-\text{όροι}})$$

- Η ακολουθία S είναι ακολουθία βαθμών του $C_{m,n}$.

$C_{m,n}$:



Βαθμός κορυφών: m

$$\begin{array}{l} m-1 \\ +m \\ +n-2m \\ \hline n-1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} n-2m-1 \\ +m \\ \hline n-m-1 \end{array}$$

Σημείωση: Η κλάση γραφημάτων $C_{m,n}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η κλάση των μεγιστοτικών (ως προς τη βαθμιαία κάλυψη) μη-Hamiltonian γραφημάτων, δηλαδή, των μη-Hamiltonian γραφημάτων τα οποία δεν καλύπτονται βαθμιαία από κάποιο μη-Hamiltonian γράφημα.

Θεώρημα 7.12 *[Ore-1961, Bondy-1972]*:

Έστω απλό γράφημα G με $|V(G)| = n \geq 3$ και $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$ ακμές. Τότε, το G είναι Hamiltonian. Επιπλέον, τα μόνα μη-Hamiltonian γραφήματα με $\binom{n-1}{2} + 1$ ακμές είναι τα $C_{1,n}$ και το $C_{2,5}$.

Απόδειξη *[με άτοπο] :*

- Έστω G απλό, μη-Hamiltonian γράφημα με $|V(G)| = n \geq 3$. • Το G καλύπτεται βαθμιαία από το $C_{m,n}$ [Θεώρημα 7.11]. $\Rightarrow$

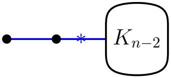
$$|E(G)| \leq |E(C_{m,n})| \overset{\text{Λ. 7.9}}{=} \binom{n-m}{2} + m^2$$
$$\overset{\text{Λ. 7.13}}{=} \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4)$$

$$\boxed{|E(G)| \leq |E(C_{m,n})| \leq \binom{n-1}{2} + 1 \qquad (1)}$$

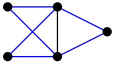
- ***Άτοπο,*** γιατί $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$. $\Rightarrow$ Το G είναι Hamiltonian. • Στην (1) η ισότητα ισχύει όταν $(m-1)(2n-3m-4) = 0$.

$\Rightarrow m = 1$ ή ($n = 5$ και $m = 2$). • Τα μόνα μη-Hamiltonian γραφήματα με $\binom{n-1}{2} + 1$ ακμές είναι τα $C_{1,n}$, $C_{2,5}$.

$C_{1,n}$:



$C_{2,5}$:



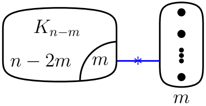
■

Λήμμα 7.13:

$$\binom{n-m}{2} + m^2 = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4)$$

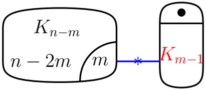
Απόδειξη :

G_1:



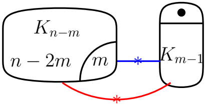
$$E(G_1) = \binom{n-m}{2} + m^2 \qquad (1)$$

G_2:

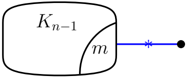


$$E(G_2) = E(G_1) + \binom{m-1}{2} \qquad (2)$$

G_3:



$$E(G_3) = E(G_2) + (n-2m)(m-1) \qquad (3)$$



$$E(G_3) = \binom{n-1}{2} + 1 + (m-1) \qquad (4)$$

$$
\begin{aligned}
(2) \Rightarrow E(G_1) &= E(G_2) - \binom{m-1}{2} \overset{(3)}{=} E(G_3) - (n-2m)(m-1) - \binom{m-1}{2} \\
&\overset{(4)}{=} \binom{n-1}{2} + 1 + (m-1) - (m-1)(n-2m) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \\
&= \binom{n-1}{2} + 1 - (m-1)(-1 + (n-2m) + \frac{(m-2)}{2}) \\
&= \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(-2 + 2n - 4m + m - 2)
\end{aligned}
$$

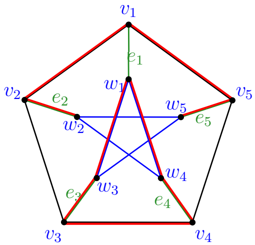
$$
\boxed{E(G_1) = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4) \qquad (5)}
$$

$$
(1),(5) \Rightarrow \binom{n-m}{2} + m^2 = \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(2n-3m-4) \qquad \blacksquare
$$

Λήμμα 7.14:

Το γράφημα Petersen δεν είναι Hamiltonian.

Απόδειξη :



- Έστω ότι υπάρχει Hamiltonian κύκλος.
- Άρτιος αριθμός ακμών από τις e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 πρέπει να χρησιμοποιηθεί (διαφορετικά, ο κύκλος ξεκινά από το $\{v_1, \ldots, v_5\}$ και τελειώνει στο $\{w_1, \ldots, w_5\}$.
- Εάν επιλεγούν 2 ακμές, τα άκρα τους πρέπει να είναι γειτονικά στον εσωτερικό και τον εξωτερικό κύκλο. ***Αδύνατο.***
- Εάν επιλεγούν 4 ακμές: $\Rightarrow$ Έστω ότι δεν επιλέγεται η e_1.
  $\Rightarrow$ Επιλέγεται η (v_1, v_2) και η (v_1, v_5).
  $\Rightarrow$ Δεν επιλέγεται η (v_2, v_3) και η (v_4, v_5).
  $\Rightarrow$ Επιλέγεται η (v_3, v_4).
- Επίσης επιλέγονται οι (w_1, w_3) και (w_1, w_4) (γιατί δεν επιλέχθηκε η e_1).
- Άρα, οι w_1, w_3, v_3, v_4, w_4 σχηματίζουν κύκλο που δεν καλύπτει όλες τις κορυφές. ***Άτοπο.*** ■