Θεωρία Γραφημάτων
8η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

k-χρωματισμός:

Έστω γράφημα G. Η συνάρτηση $\chi : V(G) \to [1, \ldots, k]$ ονομάζεται ***k-χρωματισμός*** του G αν για κάθε ακμή $e = (u, v) \in E(G)$ ισχύει ότι $\chi(u) \neq \chi(v)$.

Χρωματικές κλάσεις:

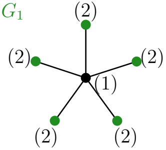
Έστω ένα γράφημα G και έστω χ ένας k-χρωματισμός του. Τα σύνολα κορυφών $\chi^{-1}(1)$, $\chi^{-1}(2)$, ..., $\chi^{-1}(k)$ ονομάζονται ***χρωματικές κλάσεις*** του G.

Χρωματικός αριθμός:

Έστω ένα γράφημα G. Ο ***χρωματικός αριθμός*** $\chi(G)$ του γραφήματος G είναι ο μικρότερος ακέραιος k για τον οποίο ισχύει ότι το G είναι k-χρωματίσιμο.

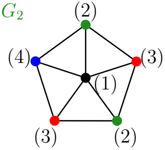
Παραδείγματα:

G_1



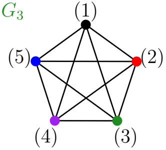
$\chi(G_1) = 2$

G_2



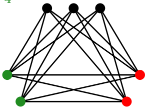
$\chi(G_2) = 4$

G_3



$\chi(G_3) = 5$
$\chi(K_n) = n$

G_4



$\chi(G_4) = 3$
Το G_4 είναι ένα τριμερές γράφημα.

Λήμμα 8.1:

Έστω γράφημα G το οποίο έχει ως επαγόμενο υπογράφημά του το πλήρες γράφημα k κορυφών K_k. Τότε $\chi(G) \geq k$.

Απόδειξη :

• Έστω ότι υπάρχει σύνολο $S \subseteq V(G)$ με $|S| = k$ και το υπογράφημα H του G το οποίο επάγεται από τις κορυφές του S είναι πλήρες. • Έστω ότι υπάρχει ένας ℓ-χρωματισμός του G, $\ell < k$. • Τότε, τουλάχιστον δύο κορυφές του H έχουν το ίδιο χρώμα. • Λόγω του ότι το H είναι πλήρες γράφημα, οι κορυφές αυτές ενώνονται με ακμή. • Άρα, ο ℓ-χρωματισμός του G δεν είναι ``νόμιμος". ***Άτοπο.*** ■

Πλήρες k-μερές:

Το γράφημα $K_{p_1,p_2,\ldots,p_k} = \overline{K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \cdots \cup K_{p_k}}$, $k \geq 2$, όπου p_1, p_2, …, p_k ακέραιοι, ονομάζεται ***πλήρες k-μερές γράφημα***.

- Τα σύνολα κορυφών $V(K_{p_1})$, …, $V(K_{p_k})$ είναι τα μέρη του $K_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$.

k-μερές γράφημα:

Ένα παραγόμενο υπογράφημα ενός πλήρους k-μερούς γραφήματος.

Λήμμα 8.2:

Έστω το γράφημα $K_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$. Τότε ισχύει:

i. $|V(K_{p_1,p_2,\ldots,p_k})| = p_1 + p_2 + \cdots + p_k \, [= n]$

ii. $|E(K_{p_1,p_2,\ldots,p_k})| = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{k} p_i^2)$

Απόδειξη :

ii. $E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} p_i(n-p_i) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} p_i n - \sum_{i=1}^{k} p_i^2) = \frac{1}{2}(n\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i^2) = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{k} p_i^2)$ ■

Λήμμα 8.3:

Έστω γράφημα G. Το G είναι k-χρωματίσιμο ανν το G είναι k-μερές.

Απόδειξη :

"$\Rightarrow$" Έστω $\chi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ ένας k-χρωματισμός του G.

- Έστω $\chi^{-1}(1)$, $\chi^{-1}(2)$, …, $\chi^{-1}(k)$ οι χρωματικές κλάσεις του G. • Κορυφές που ανήκουν στην ίδια χρωματική κλάση δεν ενώνονται με ακμή. • Το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του $K_{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ όπου $p_i = |\chi^{-1}(i)|$, $1 \leq i \leq k$. • Άρα το G είναι k-μερές. ✓

"$\Leftarrow$" Έστω ότι το G είναι k-μερές και έστω V_1, V_2, …, V_k τα k μέρη του.

- Ο χρωματισμός $\chi : \chi(v) = i \Leftrightarrow v \in V_i$ είναι ένας k-χρωματισμός του G. • Άρα το G είναι k-χρωματίσιμο. ✓ ■

Λήμμα 8.4:

Έστω γράφημα G. Ισχύει ότι $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$, όπου $n = |V(G)|$ και $m = |E(G)|$.

Απόδειξη :

- Έστω $\chi(G) = k$. • Το G είναι k-μερές. [Λήμμα 8.3.] • Το G είναι παραγόμενο υπογράφημα του $K_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$. •

$$\begin{aligned} m &\leq |E(K_{p_1,p_2,\ldots,p_k})| \\ &\overset{\text{Λήμμα 8.2}}{=} \tfrac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{k} p_i^2) \\ &\leq \tfrac{1}{2}(n^2 - \tfrac{n^2}{k}) \quad [\text{γιατί } \sum_{i=1}^{k} p_i^2 \geq \tfrac{1}{k}(\sum_{i=1}^{k} p_i)^2 = \tfrac{n^2}{k}] \end{aligned}$$

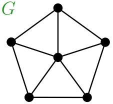
- Άρα, $m \leq \frac{1}{2}(n^2 - \frac{n^2}{k})$
  $\Rightarrow k \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$
  $\Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$ ∎

Κρίσιμο γράφημα:

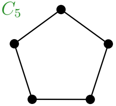
Έστω γράφημα G. Το G ονομάζεται ***κρίσιμο*** αν για κάθε υπογράφημα $H \subset G$ ισχύει ότι $\chi(G) > \chi(H)$.

Παράδειγμα: (Κρίσιμα γραφήματα.)

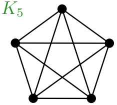
G



C_5



K_5



- Ένα κρίσιμο γράφημα είναι ``ελαχιστοτικό γράφημα'' ως προς τον χρωματικό αριθμό.

Λήμμα 8.5:

Έστω κρίσιμο γράφημα G. Ισχύει ότι $\chi(G) \leq \delta(G) + 1$.

Απόδειξη *[Με άτοπο.] :*

- Έστω $\chi(G) > \delta(G) + 1$. Έστω κορυφή $u \in V(G)$ με $d(u) = \delta(G)$.
$\Rightarrow d(u) < \chi(G) - 1$ • Το G είναι κρίσιμο. $\Rightarrow \chi(G - u) = \chi(G) - 1$ • Έστω χρωματισμός του $G - u$ με $\chi(G) - 1$ χρώματα. • Υπάρχει χρώμα, έστω c, που δεν χρησιμοποιείται στους γείτονες της u. • Μπορώ να χρωματίσω το u με το χρώμα c και άρα το G με $\chi(G) - 1$ χρώματα. ***Άτοπο.*** ■

Θεώρημα 8.6 :

Έστω γράφημα G. Τότε $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

***Απόδειξη** [Με επαγωγή] :*

- Θα δείξουμε ότι το G είναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο.

Βάση: Κάθε γράφημα με $\Delta(G) + 1$ κορυφές είναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο. ✓
Ε.Υ. Κάθε γράφημα G με $< n$ κορυφές είναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο.

Ε.Β. Έστω γράφημα G με n κορυφές.
- Έστω αυθαίρετη κορυφή u και έστω το γράφημα $G - u$. • Το $G - u$ είναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο.

$\Rightarrow$ Υπάρχει χρώμα, έστω c που δεν χρησιμοποιούν οι γείτονες της u. • Χρωματίζοντας την u με το χρώμα c, λαμβάνω ένα νόμιμο χρωματισμό για το γράφημα G με $\Delta(G) + 1$ χρώματα. ✓ ■

Θεώρημα 8.7 *[Brooks, 1941]*:

Έστω συνεκτικό γράφημα G που δεν είναι πλήρες ούτε είναι περιττού μήκους κύκλος. Τότε $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Απόδειξη *[Με επαγωγή στο $|V(G)|$] :*

- Θα δείξουμε ότι το G είναι $\Delta(G)$-χρωματίσιμο.

Βάση: Ισχύει για γραφήματα με $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ κορυφές. ✓

Ε.Υ. Έστω ότι όλα τα γραφήματα G με $n - 1$ κορυφές είναι $\Delta(G)$-χρωματίσιμα.

Ε.Β. Θα δείξω ότι όλα τα γραφήματα με n κορυφές είναι $\Delta(G)$-χρωματίσιμα.

- Έστω γράφημα G με $\Delta(G) = k$.

Περίπτωση 1: Υπάρχει κορυφή $v \in V(G)$ με βαθμό $d(v) < k$.

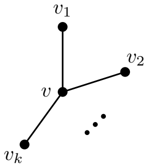
• Θεωρώ το $G - v$ και το χρωματίζω αναδρομικά. • Υπάρχει χρώμα λ που δεν χρησιμοποιούν οι $< k$ γείτονες της v. • Χρωματίζω την v με το χρώμα λ. ✓

Περίπτωση 2: Όλες οι κορυφές του G έχουν βαθμό k. [Το G είναι k-κανονικό γράφημα.]

• Έστω το $G - \{v\}$ $\rightarrow |V(G - \{v\}| = n - 1, \Delta(G - \{v\}) = \Delta(G) = k$
$\rightarrow$ Το $G - \{v\}$ είναι k-χρωματίσιμο

• **Θα δείξουμε πώς να χρωματίσουμε το G με k χρώματα.**

Περίπτωση 2a: Υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές της v που έχουν το ίδιο χρώμα.

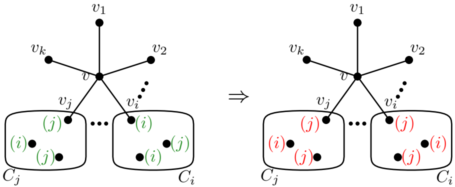


- Κάποιο χρώμα, έστω λ, δεν χρησιμοποιείται στον χρωματισμό των γειτόνων της v (στο χρωματισμό του $G - \{v\}$). • Χρωμάτισε την v με λ. ✓

Περίπτωση 2b: Όλοι οι γείτονες της v έχουν διαφορετικό χρώμα.

- Έστω $\chi(v_i) = i$. • G_{ij}: Το γράφημα που επάγεται από τις κορυφές με χρώμα i και χρώμα j.

Περίπτωση 2b1: Οι κορυφές v_i και v_j ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, έστω C_i, C_j του G_{ij}.

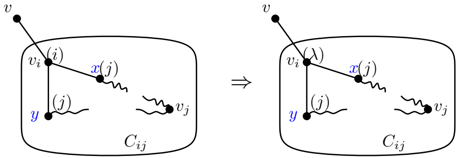


- Άλλαξε τα χρώματα $(i \leftrightarrow j)$ στην C_i. Το γράφημα παραμένει νόμιμα χρωματισμένο.
- Χρωμάτισε την v με χρώμα i. ✓

Περίπτωση 2b2: Οι κορυφές v_i και v_j ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, έστω C_{ij}, για κάθε ζεύγος i, j του G_{ij}.

- $\forall v_i, v_j$ υπάρχει (v_i, v_j) μονοπάτι στην C_{ij}.

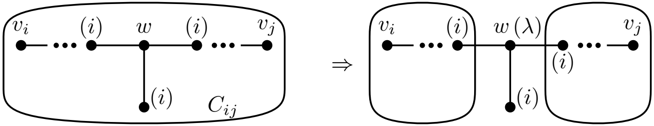
Περίπτωση 2b2a: $d(v_i) \geq 2$ στην C_{ij}.



- Έστω $x, y \in N_{C_{ij}}(v_i)$ με τουλάχιστον μια από τις x, y διαφορετική από την v_j.
- $\chi(x) = \chi(y) = j$
- $d_{C_{ij}}(v_i) \leq \Delta(G) - 1$. [Λείπει η ακμή (v, v_i).]
- Υπάρχει κάποιο χρώμα, έστω λ, διαφορετικό από το i, το οποίο δεν χρησιμοποιείται από κανένα γείτονα του v_i στο G.
- Φτιάξε νέο χρωματισμό του G όπου:
  - $\chi(v_i) = \lambda$
  - $\chi(v) = i$ ✓

Περίπτωση 2b2b: $d(v_i) = 1$ στην C_{ij}. [Όμοια, $d(v_j) = 1$ στην C_{ij}.]

Περίπτωση 2b2b1: Υπάρχει $w \in C_{ij}$ (διαφορετικό από τα v_i, v_j, στο μονοπάτι από το v_i στο v_j): $d_{C_{ij}}(w) \geq 3$.



- Έστω το πιο κοντινό στο v_i τέτοιο w. • Έστω $\chi(w) = j$. Τότε όλοι οι γείτονες του w έχουν χρώμα i. • Επειδή έχω 3 γείτονες του w με χρώμα i περισσεύουν 2 χρώματα τα οποία δεν χρησιμοποιούνται για τους γείτονες του w, ένα εκ των οποίων είναι διαφορετικό του j. Έστω λ το χρώμα αυτό. • Χρωματίζω το w με το χρώμα λ. • Τότε τα v_i και v_j βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G_{ij}.

$\Rightarrow$ Το γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί με $\Delta(G)$ χρώματα [περίπτωση 2b1]. ✓

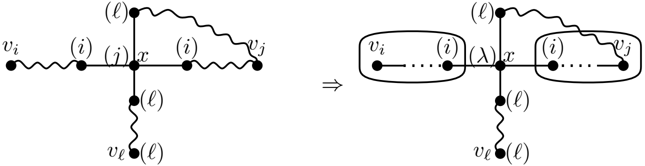
Περίπτωση 2b2b2: $d_{C_{ij}}(w) = 2, \forall w \in C_{ij}$. $[w \notin \{v_i, v_j\}]$

- Στην περίπτωση αυτή η συνιστώσα C_{ij} στην οποία ανήκουν οι v_i, v_j, για κάθε ζεύγος i, j, $i \neq j$ είναι ένα μονοπάτι με τα v_i και v_j στα άκρα του.

- Έστω οι συνιστώσες C_{ij}, $C_{j\ell}$ των G_{ij}, $G_{j\ell}$.

Περίπτωση 2b2b2a: Τα μονοπάτια C_{ij} και $C_{j\ell}$ έχουν κοινή κορυφή διαφορετική από την v_j.

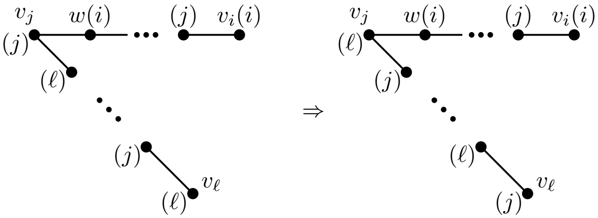
- Έστω x μια κοινή κορυφή των δυο μονοπατιών (διαφορετική από την v_j).



- $\chi(x) = j$ • Η x έχει 2 γείτονες με χρώμα i και 2 γείτονες με χρώμα ℓ. • Οι γείτονες της x δεν χρησιμοποιούν 2 χρώματα εκ των οποίων ένα είναι διαφορετικό του j. Έστω λ το αχρησιμοποίητο χρώμα. • Χρωματίζουμε την x με το χρώμα λ. • Τότε, οι v_i και v_j βρίσκονται σε διαφορετικές συνιστώσες του G_{ij}.

$\Rightarrow$ Υπάρχει χρωματισμός του G με $\Delta(G)$ χρώματα [περίπτωση 2b1]. ✓

Περίπτωση 2b2b2b: Τα μονοπάτια C_{ij}, $C_{j\ell}$ έχουν μόνη κοινή κορυφή την v_j.



- Έστω w η γειτονική της v_j κορυφή στο μονοπάτι $C_{ij}(v_j \to v_i)$. • Στο μονοπάτι $C_{j\ell}(v_j \to v_\ell)$ ανταλλάσσω τα χρώματα j με ℓ. • Στον νέο χρωματισμό, έστω h θεωρώ την συνιστώσα $C^h_{v_iv_j}$ που ενώνει τις κορυφές v_i με v_j. • Η $C^h_{v_iv_j}$ περιλαμβάνει κόμβους με χρώματα ℓ και i. Λόγω του ότι ο βαθμός του v_j στην $C^h_{v_iv_j}$ είναι ίσος με 1, και η w είναι γειτονική στην v_j και το χρώμα της w είναι i, η w ανήκει στο μονοπάτι $C^h_{v_iv_j}(v_j \to v_i)$. • Η $C^h_{v_iv_\ell}$ περιλαμβάνει κόμβους με χρώματα i και j. Λόγω του ότι ο βαθμός της v_i στο $C^h_{v_iv_\ell}$ είναι ίσος με 1, και οι βαθμοί όλων των κορυφών του μονοπατιού είναι ίσοι με 2, και ότι το παλιό μονοπάτι από την v_i προς την w εξακολουθεί να είναι στο G_{ij}, η w ανήκει στην $C^h_{v_iv_\ell}$.

Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να βρούμε χρωματισμό του G [περίπτωση 2b2b2a]. ✓

Περίπτωση 2b2b3: Δεν υπάρχει $w \in C_{ij}$ στο μονοπάτι από το v_i στο v_j, δηλαδή, η C_{ij} αποτελείται από την ακμή (v_i, v_j).

- Επειδή αυτό συμβαίνει για όλα τα ζεύγη v_i, v_j, οι k γείτονες του v σχηματίζουν ένα πλήρες γράφημα.
  $\Rightarrow$ Η v με τους γείτονες της σχηματίζει ένα πλήρες γράφημα.
- Αυτό συμβαίνει για κάθε $v \in V$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε μία κορυφή v η αφαίρεση της οποίας από το G δεν θα οδηγούσε στην παρούσα περίπτωση.
  $\Rightarrow$ Το G είναι πλήρες γράφημα. [Γιατί;]
  $\Rightarrow$ Αυτό αντιβαίνει την υπόθεση του θεωρήματος, συνεπώς, η παρούσα περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί. ✓

■