

Θεωρία Γραφημάτων

9η Διάλεξη

A. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Ταιριάσματα (Matchings)

Ταίριασμα:

Ένα υποσύνολο M των ακμών ενός γραφήματος G ονομάζεται **ταίριασμα** στο G εάν οι ακμές του M δεν έχουν κοινές κορυφές.

Οι δύο κορυφές στα άκρα κάθε ακμής του M λέμε ότι **έχουν ταριαστεί στο M** .

Κορεσμένη κορυφή (saturated):

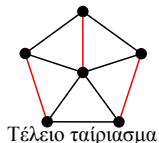
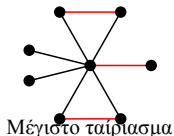
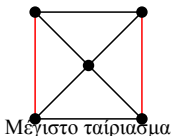
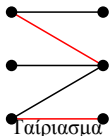
Έστω ένα ταίριασμα M σε ένα γράφημα G . Μία κορυφή u ονομάζεται **M -κορεσμένη** εάν μια ακμή του M προσπίπτει στην u . Διαφορετικά ονομάζεται **M -ακόρεστη**.

Μέγιστο ταίριασμα:

Ένα ταίριασμα M του γραφήματος G ονομάζεται **μέγιστο ταίριασμα** εάν δεν υπάρχει ταίριασμα M' του G τέτοιο ώστε $|M'| > |M|$.

Τέλειο ταίριασμα:

Εάν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος G είναι M -κορεσμένες, τότε το M ονομάζεται **τέλειο ταίριασμα**.



$\mu(G)$:

Το πλήθος ακμών κάποιου μέγιστου ταιριάσματος M του γραφήματος G συμβολίζεται με $\mu(G)$.

Λήμμα 9.1:

Έστω γράφημα G . Ισχύει ότι $\chi(\overline{G}) \leq V(G) - \mu(G)$.

Απόδειξη :

- Έστω M ένα μέγιστο ταιρίασμα του G (με $\mu(G)$ ακμές). Χρωματίζουμε το \overline{G} ως εξής: • Τα άκρα κάθε ακμής του M χρωματίζονται με το ίδιο χρώμα. Στο \overline{G} δεν ενώνονται με ακμή. $\Rightarrow \mu(G)$ χρώματα.
- Οι υπόλοιπες $V(G) - 2\mu(G)$ χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα. $\Rightarrow V(G) - 2\mu(G)$
- Συνολικά: $V(G) - 2\mu(G) + \mu(G)$ • $\chi(\overline{G}) \leq V(G) - \mu(G)$ ■
 $= V(G) - \mu(G)$ χρώματα.

Λήμμα 9.2:

Έστω γράφημα G όπου $|V(G)| = n$ και $|E(G)| = m$. Ισχύει ότι $\mu(G) \leq \frac{2mn}{n+2m}$.

Απόδειξη :

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε γράφημα G ισχύει $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$ [Λήμμα 8.4].
- Για το \bar{G} , συνεπώς, ισχύει:

$$\chi(\bar{G}) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right)} \quad (1) \bullet \text{ Από Λήμμα 9.1 ισχύει: } \chi(\bar{G}) \leq n - \mu(G)$$

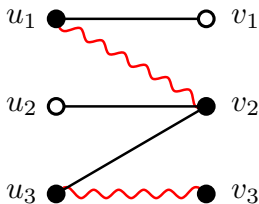
$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(G) &\leq n - \chi(\bar{G}) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} n - \frac{n^2}{n^2 - 2\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right)} \\ &= n - \frac{n^2}{n^2 - n(n-1) + 2m} = n - \frac{n^2}{n^2 - n^2 + n + 2m} \\ &= n - \frac{n^2}{n+2m} = \frac{n(n+2m) - n^2}{n+2m} \\ &= \frac{2mn}{n+2m} \end{aligned}$$

***M*-εναλλασσόμενο μονοπάτι (alternating path):**

Έστω M ένα ταίριασμα στο γράφημα G . Ένα μονοπάτι P στο G ονομάζεται ***M*-εναλλασσόμενο μονοπάτι** εάν οι ακμές του εναλλάσσονται μεταξύ των ακμών του $E(G) - M$ και του M .

***M*-επαυξανόμενο μονοπάτι (augmenting path):**

Ένα ***M*-εναλλασσόμενο μονοπάτι** του οποίου τα τερματικά σημεία είναι ακόρεστα.



$v_1 u_1 v_2 u_3 v_3$:

Εναλλασσόμενο μονοπάτι.

$u_2 v_2 u_1 v_1$:

Επαυξανόμενο μονοπάτι.

Θεώρημα 9.3 [Berge,1957]:

Έστω γράφημα G και ταίριασμα M του G . Το M είναι ένα μέγιστο ταίριασμα στο G αν και μόνο αν το G δεν περιέχει κανένα ***M*-επαυξανόμενο μονοπάτι**.

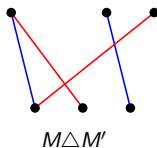
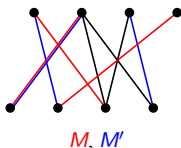
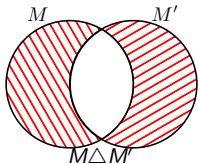
Απόδειξη :

“ \Rightarrow ” [Με άτοπο.]

- Έστω το M είναι μέγιστο ταίριασμα και το G περιέχει ένα M -επαυξανόμενο μονοπάτι P με $2\lambda + 1$ ακμές, $\lambda \geq 1$.
 - $P : v_0 v_1 v_2 \dots v_{2\lambda} v_{2\lambda+1}$ και $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2\lambda-1}, v_{2\lambda}) \in M$.
 - Έστω το ταίριασμα $M' = M - \{(v_i, v_{i+1}), i \text{ περιττό και } 1 \leq i \leq 2\lambda - 1\} \cup \{(v_i, v_{i+1}), i \text{ άρτιο και } 0 \leq i \leq 2\lambda\}$.
- $|M'| = |M| + 1$. **Άτοπο**, γιατί το M είναι μέγιστο. ✓

“ \Leftarrow ” [Με άτοπο.]

- Έστω ότι το G δεν περιέχει M -επαυξανόμενο μονοπάτι.
 - Έστω ότι το M δεν είναι μέγιστο και έστω M' ένα μέγιστο ταίριασμα.
- $\Rightarrow |M'| > |M|$.
- Έστω $H = G[M \Delta M']$ όπου $M \Delta M'$ η συμμετρική διαφορά των M και M' .



- Κάθε κορυφή του H έχει βαθμό 1 ή 2.

[Είναι το άκρο το πολύ μιας ακμής του M και το πολύ μιας ακμής του M' .] • Κάθε συνιστώσα του H είναι:

- Είτε άρτιος κύκλος με ακμές να εναλλάσσονται μεταξύ των M και M' , ή
- μονοπάτι με ακμές να εναλλάσσονται μεταξύ των M και M' .
- Λόγω του ότι $|M'| > |M|$, το M' περιέχει πιο πολλές ακμές από το M .
⇒ Υπάρχει ένα μονοπάτι-συνιστώσα P στο $M \triangle M'$ που περιέχει πιο πολλές ακμές του M' .
⇒ Το μονοπάτι P ξεκινάει και τελειώνει με ακμή του M' . • Στο H το μονοπάτι P έχει άκρα τα οποία είναι M' -κορεσμένα.
⇒ Στο G τα άκρα του μονοπατιού P είναι M -ακόρεστα. • Υπάρχει M -επαυξανόμενο μονοπάτι στο G .
Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι το G δεν περιέχει M -επαυξανόμενο μονοπάτι. ✓



Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα

Θεώρημα 9.4 [Hall, 1935]:

Έστω $G = (A, B, E)$ ένα διμερές γράφημα. Το G περιέχει ένα ταίριασμα M τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του A να είναι M -κορεσμένη αν $|N(S)| \geq |S|$ για κάθε $S \subseteq A$. (1)

Απόδειξη :

“ \Rightarrow ” [Με άτοπο.]

- Έστω ότι το G περιέχει ένα ταίριασμα M τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του A είναι M -κορεσμένη.
- Οι κορυφές του συνόλου S , $S \subseteq A$, ταιριάζονται στο M σε κορυφές του $N(S)$.
- Συνεπώς, $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq A$. ✓

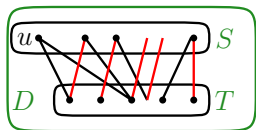
“ \Leftarrow ”

- Έστω ότι το G ικανοποιεί την (1) αλλά δεν υπάρχει ταίριασμα M με όλες τις κορυφές του A να είναι M -κορεσμένες.
- Έστω M' ένα μέγιστο ταίριασμα του G .
- Οι κορυφές του A δεν είναι όλες M' -κορεσμένες.
- Έστω u μια M' -ακόρεστη κορυφή του A .
- Έστω D οι κορυφές του G που ενώνονται με την u μέσω M' -εναλλασσόμενων μονοπατιών.

- Η u είναι η μόνη M' -ακόρεστη κορυφή του D .

[Από Θ. 9.3 και επειδή το M' είναι μέγιστο ταίριασμα.]

• Ορίζουμε το $S = D \cap A$
και το $T = D \cap B$



• • • A

• • • B

- Οι κορυφές του $S - \{u\}$ ταιριάζονται με τις

κορυφές του T . Άρα,

$$|T| = |S| - 1 \quad (2)$$

- Λόγω του ότι κάθε κορυφή του $N(S)$ ενώνεται με την u μέσω ενός M' -εναλλασσόμενου μονοπατιού ισχύει ότι:

$$N(S) = T \quad (3)$$

- (2),(3) $\Rightarrow |N(S)| = |S| - 1 < |S|$

Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq A$. ✓

Λήμμα 9.5:

Έστω διμερές r -κανονικό γράφημα $G = (A, B, E)$. Τότε ισχύει ότι $|A| = |B|$.

Απόδειξη :

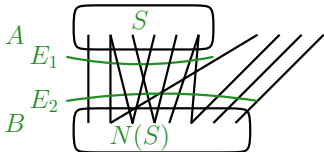
- $|E| = r|A|$ και $|E| = r|B|$. • Άρα, $r|A| = r|B| \Rightarrow |A| = |B|$.

Θεώρημα 9.6 (Marriage theorem):

Έστω $G = (A, B, E)$ ένα r -κανονικό διμερές γράφημα, $r \geq 1$. Ισχύει ότι το G έχει ένα τέλει ταίριασμα.

Απόδειξη :

- Ισχύει ότι $|A| = |B|$ [από Λήμμα 9.5].
- Έστω $S \subseteq A$.
- Ορίζουμε ως E_1 : ακμές που προσπίπτουν στο S .
- Εξ ορισμού του $N(\cdot) \Rightarrow E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow r|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = r|S| \Rightarrow |N(S)| \geq |S|$
- Άρα, από το Θεώρημα του Hall \Rightarrow Το G έχει ένα τέλει



ταίριασμα. ■

Τέλεια ταιριάσματα

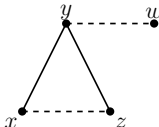
Λήμμα 9.7:

Έστω ένα μεγιστοτικό γράφημα G με άρτιο βαθμό n το οποίο δεν έχει τέλει ταιρίασμα και έστω U το σύνολο κορυφών του με βαθμό $n - 1$. Τότε ισχύει ότι το $G - U$ είναι η ένωση ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων.

Απόδειξη [Με άτοπο] :

• Έστω ότι υπάρχει μια συνιστώσα του $G - U$ η οποία δεν είναι πλήρης.

• Στην συνιστώσα υπάρχουν κορυφές x, y, z :
 $(x, y) \in E(G)$, $(y, z) \in E(G)$, $(x, z) \notin E(G)$. •
Το ότι $y \notin U$ σημαίνει ότι $d(y) \leq n - 2$ και άρα
υπάρχει κορυφή $w \in G - U$: $(y, w) \notin E(G)$.



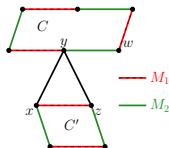
• Το $G + e$ έχει τέλει ταιρίασμα για κάθε $e \notin E(G)$ [γιατί το G είναι μεγιστοτικό]. • Έστω M_1 ένα τέλει ταιρίασμα στο $G + (x, z)$. • Έστω M_2 ένα τέλει ταιρίασμα στο $G + (y, w)$. • Έστω H το υπογράφημα του $G \cup \{(x, z), (y, w)\}$ που παράγεται από τις ακμές του $M_1 \Delta M_2$.

- Κάθε κορυφή του H έχει βαθμό 2 [προσπίπτουν σε κάθε κορυφή μια ακμή του M_1 και μια του M_2].
- Το H είναι ένωση ξένων μεταξύ τους κύκλων άρτιου πλήθους κορυφών, με ακμές εναλλασσόμενες μεταξύ των M_1 και M_2 .

Περίπτωση 1: Οι (x, z) και (y, w) ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του H .

- Έστω οι (y, w) και (x, z) ανήκουν στους κύκλους C και C' του H .
- Οι ακμές του M_1 που ανήκουν στο C μαζί με τις ακμές του M_2 που ανήκουν στο C' και όλες τις άλλες ακμές του M_2 στο $H - \{C, C'\}$ είναι ένα τέλει ταίριασμα του G .

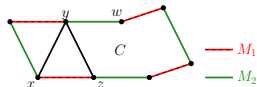
Άτοπο. ✓



Περίπτωση 2: Οι (x, z) και (y, w) ανήκουν στην ίδια συνιστώσα (κύκλο) του H .

- Έστω ότι στον C οι κορυφές εμφανίζονται με την σειρά: x, \dots, y, w, \dots, z .

- Οι ακμές του M_1 στο τμήμα y, w, \dots, z του C μαζί με την ακμή (y, z) και τις ακμές του M_2 στο τμήμα z, x, \dots, y του C και όλες τις άλλες ακμές του M_2 στο $H - C$ σχηματίζουν ένα τέλει ταίριασμα στο G .
- Άρα, το $G - U$ αποτελείται από την ένωση ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων. ✓



Άτοπο. ■

Θεώρημα 9.8 [Tutte,1947]:

Έστω γράφημα G . Το G έχει ένα τέλει ταίριασμα αν $\sigma(G - S) \leq |S|$ για κάθε $S \subset V(G)$, όπου με $\sigma(\cdot)$ συμβολίζουμε τον αριθμό των συνιστωσών περιττού βαθμού ενός γραφήματος.

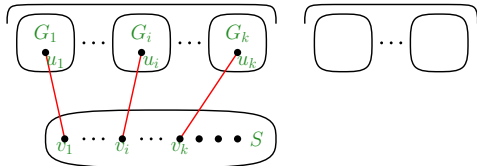
Απόδειξη [Από τον Lovász-1973] :

⇒

- Έστω ότι το G έχει ένα τέλει ταίριασμα M .
- Έστω S ένα γνήσιο υπολύνολο του $V(G)$.
- Έστω G_1, G_2, \dots, G_k οι "περιττές" συνιστώσες του $G - S$.
- Επειδή η συνιστώσα $G_i, 1 \leq i \leq k$, έχει περιττό βαθμό, κάποια κορυφή της u_i έχει ταιριαστεί στο M με κάποια κορυφή v_i του S .

Περιττές συνιστώσες του $G - S$

Άριτες συνιστώσες του $G - S$



- $\sigma(G - S) = k = |\{v_1, v_2, \dots, v_k\}| \leq |S|$ λόγω του ότι $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq S$. ✓

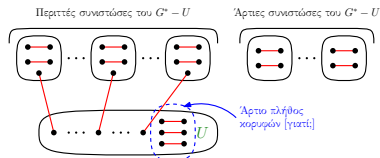
“ \Leftarrow ” (Με άτοπο.)

• Έστω ότι $\alpha(G - S) \leq |S|$ για κάθε $S \subset V(G)$, αλλά το G δεν έχει τέλει ταίριασμα. • Έστω ένα μεγιστοτικό γράφημα G^* το οποίο δεν έχει τέλει ταίριασμα και του οποίου παραγόμενο υπογράφημα είναι το G [$V(G^*) = V(G)$]. • $\alpha(G^* - S) \leq \alpha(G - S)$.

• Άρα, $\alpha(G^* - S) \leq |S|, \forall S \subset V(G^*)$ (1) • Για $S = \emptyset \Rightarrow \alpha(G - S) \leq 0 \Rightarrow$ Το G έχει

άρτιο πλήθος κορυφών. • Έστω U το σύνολο κορυφών του G^* που έχουν βαθμό $n - 1$ [$V(G) = n$] στο G^* . • Το γράφημα $G^* - U$ αποτελείται από ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους πλήρων γραφημάτων [Λήμμα 9.7]. • Από την (1) $\Rightarrow \alpha(G^* - U) \leq |U|$, δηλαδή το πολύ $|U|$ από τις συνιστώσες του $G^* - U$ είναι περιττού βαθμού. • Το G^* έχει ένα τέλει ταίριασμα!

- Ταϊριάζουμε μια κορυφή από κάθε περιττή συνιστώσα με μια κορυφή του U . Είναι δυνατό γιατί $\alpha(G^* - U) \leq |U|$.
- Όλες οι υπόλοιπες κορυφές σε κάθε πλήρη συνιστώσα, ταϊριάζονται αυθαίρετα.



• **Άτοπο**, γιατί υποθέσαμε ότι το G^* είναι μεγιστοτικό χωρίς τέλει ταίριασμα. • Άρα το G έχει τέλει ταίριασμα.

✓

Πόρισμα 9.9:

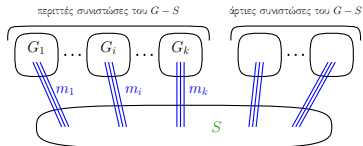
Κάθε 3-κανονικό γράφημα δίχως γέφυρες έχει ένα τέλει ταίριασμα [Petersen, 1891].

Απόδειξη :

- Έστω G ένα 3-κανονικό γράφημα χωρίς γέφυρες.
- Έστω σύνολο κορυφών $S \subset V(G)$.
- Έστω G_1, G_2, \dots, G_k οι περιττές συνιστώσες του $G - S$.
- Έστω $m_i, 1 \leq i \leq k$ ο αριθμός των ακμών με το ένα άκρο στο G_i και το άλλο στο S .
- Το γράφημα G είναι 3-κανονικό \Rightarrow

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3|V(G_i)|, i = 1 \dots k \quad (1)$$

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3|S| \quad (2)$$



- $m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2E(G_i)$

- \Rightarrow Το m_i είναι περιττό [κάθε συνιστώσα G_i είναι περιττού βαθμού].
- $m_i \neq 1$ λόγω του ότι το G δεν έχει γέφυρες.
 - $m_i \geq 3$ λόγω του ότι $m_i \neq 1$ και περιττό.

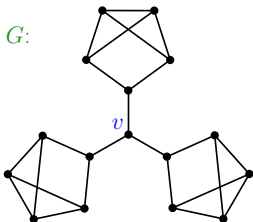
- $$o(G - S) = k \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k m_i$$

$$\leq \frac{1}{3} \sum_{v \in S} d(v) \stackrel{(2)}{=} |S|$$

- Το G έχει ένα τέλει ταίριασμα [Θεώρημα 9.8(Tutte)]. ■

Σημείωση: Υπάρχουν 3-κανονικά γραφήματα με γέφυρες τα οποία δεν έχουν τέλει ταίριασμα.

Απόδειξη :



- Το γράφημα G είναι 3-κανονικό με γέφυρες.
- $o(G - \{v\}) = 3 > |\{v\}| = 1$ το οποίο παραβιάζει την συνθήκη στο θεώρημα του Tutte [Θ. 9.8].

