Θεωρία Γραφημάτων
11η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Απεικόνιση γραφήματος στο επίπεδο (Embedding):

Η αντιστοίχιση των κορυφών του γραφήματος σε σημεία του επιπέδου και των ακμών σε καμπύλες που ενώνουν τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα της ακμής.

Επίπεδη απεικόνιση:

Μια απεικόνιση στην οποία:

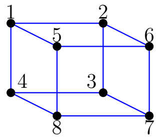
- Οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε ακμές δεν τέμνουν τον εαυτό τους.
- Δύο καμπύλες τέμνονται μόνο σε σημεία που αντιστοιχούν σε κορυφή στην οποία και οι δύο προσπίπτουν.

Επίπεδο γράφημα (Planar graph):

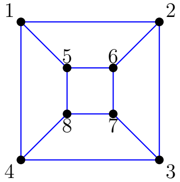
Ένα γράφημα το οποίο έχει μια επίπεδη απεικόνιση.

Ενεπίπεδο γράφημα (Plane graph):

Ένα επίπεδο γράφημα το οποίο συνοδεύεται από μια συγκεκριμένη επίπεδη απεικόνιση.



Μη επίπεδη απεικόνιση του υπερκύβου Q_3.



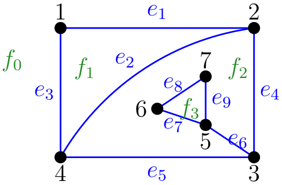
Επίπεδη απεικόνιση του υπερκύβου Q_3.

Όψεις ενεπίπεδου γραφήματος:

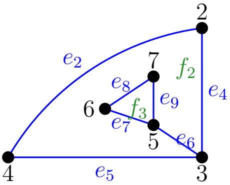
Τα ενωμένα τμήματα του $\Re^2$ που προκύπτουν εάν αφαιρέσουμε τις κορυφές και τις ακμές ενός γραφήματος από μια επίπεδη απεικόνισή του.

Περιθώριο όψης (face boundary):

Η περιήγηση που προκύπτει από τις ακμές και κορυφές που προσπίπτουν σε μια όψη f ενός ενεπίπεδου γραφήματος G (σε clockwise ή ccw διάταξη). Μερικές ακμές/κορυφές μπορεί να εμφανίζονται 2 φορές.



f_0: Εξωτερική όψη.



Περιθώριο της f_2:
$2e_4 3e_6 5e_9 7e_8 6e_7 5e_6 3e_5 4e_2 2$

Θεώρημα 11.1 *[Euler-1750]*:

Έστω συνεκτικό ενεπίπεδο γράφημα G με n κορυφές, m ακμές και f όψεις. Τότε, ισχύει:

$$n + f = m + 2 \qquad (1)$$

***Απόδειξη** [με επαγωγή στο πλήθος ακμών] :*

- $\boxed{G \text{ συνεκτικό} \Rightarrow m \geq n - 1 \qquad (2)}$

Βάση: $m = n - 1$

- $\boxed{\text{Το } G \text{ είναι δένδρο.} \Rightarrow f = 1 \qquad (3)}$
- $n + f = m + 2 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow}$

  $n + 1 = n - 1 + 2 \Leftrightarrow$

  $n + 1 = n + 1 \quad \checkmark$

Ε.Υ. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε ενεπίπεδο συνεκτικό γράφημα με $k \geq n - 1$ ακμές.

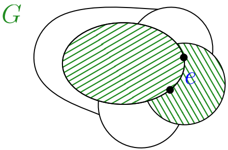
Ε.Β. Θα δείξω ότι το θεώρημα ισχύει για ενεπίπεδα συνδεδεμένα γραφήματα με $k + 1$ ακμές.

- Έστω ενεπίπεδο συνεκτικό γράφημα G με $m_G = k + 1$ ακμές, n_G κορυφές και f_G όψεις.

- $m_G = k+1 \geq n \Rightarrow$ Το G έχει κύκλο, και άρα έχει τουλάχιστον μια εσωτερική όψη. • Έστω e μια ακμή που ανήκει στον κύκλο που ορίζει μια εσωτερική όψη του G. • Κατασκευάζω το ενεπίπεδο γράφημα G' αφαιρώντας από το G την ακμή e.
- Το G' έχει $f_{G'} = f_G - 1$ όψεις και $m_{G'} = m_G - 1 = k$ ακμές.
- Από επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$n_{G'} + f_{G'} = m_{G'} + 2 \Leftrightarrow$
$n_G + (f_G - 1) = (m_G - 1) + 2 \Leftrightarrow$
$n_G + f_G = m_G + 2$

το οποίο είναι το ζητούμενο για το γράφημα G. ✓ ■



Πόρισμα 11.2:

Ο αριθμός των όψεων ενός επίπεδου συνεκτικού γραφήματος δεν εξαρτάται από την επίπεδη απεικόνισή του.

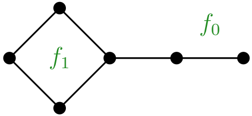
Απόδειξη :

- Ο αριθμός των όψεων (από το Θ. Euler) είναι πάντα ίσος με $m - n + 2$. ■

Ερώτηση 11.1: Πώς μεταβάλλεται ο τύπος του Euler για γραφήματα με k συνεκτικές συνιστώσες;

Βαθμός όψης:

Ο αριθμός των ακμών μιας όψης συμβολίζεται με $d(f)$. Ακμές που προσπίπτουν σε μια μόνο όψη προσμετρούνται 2 φορές.



$d(f_0) = 8$
$d(f_1) = 4$

Λήμμα 11.3:

Έστω επίπεδο γράφημα G με m ακμές και έστω $\mathcal{F}(G)$ το σύνολο των όψεών του. Τότε,

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(G)} d(f) = 2m$$

Απόδειξη :

- Κάθε ακμή συνεισφέρει ακριβώς 2 μονάδες στο άθροισμα γιατί είτε προσπίπτει σε 2 όψεις ή προσπίπτει σε μια όψη αλλά μετριέται διπλά. ■

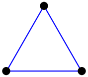
Θεώρημα 11.4 :

Έστω επίπεδο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Τότε,

$$m \leq 3n - 6 \qquad (4)$$

Απόδειξη :

- Ισχύει για $n = 3$.



$m = 3$ (μέγιστος # ακμών)
$3 \leq 3 \cdot 3 - 6 = 3$ ✓

- Υποθέτω ότι $n \geq 4$. • Υποθέτω ότι το G είναι συνεκτικό. Αλλιώς, η (4) ισχύει για κάθε συνεκτική του συνιστώσα.

- Για κάθε όψη $f \in \mathcal{F}(G)$ ισχύει:

$$d(f) \geq 3 \Rightarrow \sum_{f \in \mathcal{F}(G)} d(f) \geq 3f \qquad (5)$$

- Από Λήμμα 11.3 έχουμε:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(G)} d(f) = 2m \qquad (6)$$

- $$(5),(6) \Rightarrow 2m \geq 3f \qquad (7)$$

- Από Θ. Euler

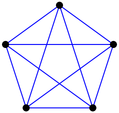
$$\begin{aligned} n + f = m + 2 &\Leftrightarrow 2 = n + f - m \\ &\Leftrightarrow 6 = 3n + 3f - 3m \\ &\overset{(7)}{\Leftrightarrow} 6 \leq 3n + 2m - 3m \\ &\Leftrightarrow 6 \leq 3n - m \\ &\Leftrightarrow m \leq 3n - 6 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Πόρισμα 11.5:

Το γράφημα K_5 δεν είναι επίπεδο.

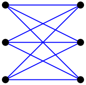
Απόδειξη :

- Για το K_5 έχω:
  $n = 5$
  $m = 10$



- Εάν το K_5 ήταν επίπεδο, θα ίσχυε ότι:
  $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow$
  $10 \leq 9$
  Αυτό είναι ψευδές. ■

Σημείωση: Η σχέση $m \leq 3n - 6$ δεν είναι αρκετή για να αποδείξουμε, με όμοιο τρόπο, ότι το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.



$n = 6$ $\quad$ $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 \Leftrightarrow$
$m = 9$ $\quad$ $9 \leq 12$ ισχύει

Θεώρημα 11.6 :

Έστω διμερές επίπεδο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές. Τότε ισχύει:

$$m \leq 2n - 4 \qquad (8)$$

Απόδειξη :

- Για διμερή γραφήματα ισχύει ότι $d(f) \geq 4$. • Ομοια με την απόδειξη του θεωρήματος 11.4. ■

Ερώτηση 11.2: Να δειχθεί ότι το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Ερώτηση 11.3: Να δειχθεί ότι κάθε υπογράφημα των K_5 και $K_{3,3}$ είναι επίπεδο.

Θεώρημα 11.7 *[Wagner-1937, Fary-1948]*:

Κάθε επίπεδο γράφημα μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι ακμές του να αντιστοιχούν σε ευθύγραμμα τμήματα.

Λήμμα 11.8:

Για κάθε επίπεδο γράφημα G ισχύει ότι $\delta(G) \leq 5$.

Απόδειξη *[Με άτοπο] :*

- Έστω $\delta(G) \geq 6$. • Τότε, $\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n$ και $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ • Άρα,

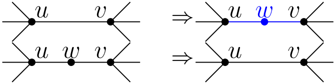
$2m \geq 6n \Leftrightarrow m \geq 3n$. ***Άτοπο***, γιατί για επίπεδα γραφήματα ισχύει ότι $m \leq 3n - 6$. ■

Ομοιομορφικά γραφήματα:

Δύο γραφήματα είναι ***ομοιομορφικά*** όταν μπορεί να παραχθεί το ένα από το άλλο με μια ή περισσότερες υποδιαιρέσεις ακμών και συμπτύξεις κορυφών.

Υποδιαίρεση ακμής:

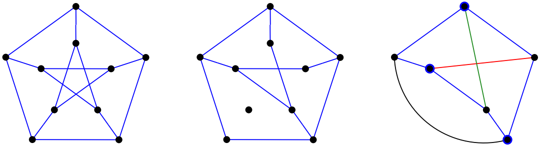
Σύμπτυξη κορυφής:



Θεώρημα 11.9 *[Kuratowski-1930]*:

Ένα γράφημα G είναι επίπεδο ανν κανένα υπογράφημά του δεν είναι ομοιομορφικό με το K_5 ή το $K_{3,3}$.

Παράδειγμα: Το γράφημα Petersen δεν είναι επίπεδο.

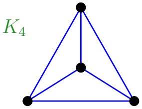


Σημείωση: Η σχέση $m \leq 3n - 6$ δεν αρκεί για να αποδειχθεί η μη-επιπεδότητα του γραφήματος Petersen.

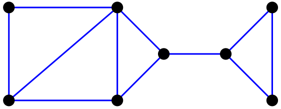
- Για το γράφημα Petersen έχουμε οτι $n = 10$, $m = 15$ και $15 \leq 3 \cdot 10 - 6 = 24$, το οποίο ισχύει.

Εξωεπίπεδο γράφημα (outer-planar graph):

Ένα επίπεδο γράφημα G ονομάζεται ***εξωεπίπεδο*** εάν υπάρχει επίπεδη απεικόνιση του G στην οποία όλες οι κορυφές προσπίπτουν στην εξωτερική όψη.



Μη-εξωεπίπεδο γράφημα



Εξωεπίπεδο γράφημα

Θεώρημα 11.10 :

Ένα γράφημα είναι εξωεπίπεδο ανν δεν υπάρχει κάποιο υπογράφημά του ομοιομορφικό με το K_4 ή το $K_{2,3}$.

Απόδειξη :

- Το K_4 και το $K_{2,3}$ δεν είναι εξωεπίπεδα. [Αλλιώς το K_5 και το $K_{3,3}$ θα ήταν επίπεδα]

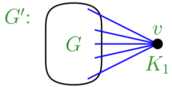
Σημείωση: Η εξωεπιπεδότητα δεν πλήττεται από την αφαίρεση κορυφής/ακμής και την σύμπτυξη ακμής/κορυφής.

"$\Rightarrow$" [Με άτοπο]

• Έστω ότι το εξωεπίπεδο γράφημα G περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_4 ή το $K_{2,3}$.
• Μέσω συμπτύξεων κορυφής και διαγραφές ακμών-κορυφών στο G, παίρνω το K_4 ή το $K_{2,3}$ χωρίς να πλήττεται η εξωεπιπεδότητα. ***Άτοπο,*** γιατί τα K_4 και $K_{2,3}$ δεν είναι εξωεπίπεδα. ✓

"$\Leftarrow$" [Με άτοπο]

• Έστω ότι το G δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_4 ή το $K_{2,3}$ και έστω ότι το G δεν είναι εξωεπίπεδο. • Το G είναι επίπεδο. [Δεν περιέχει υπογραφήματα ομοιομορφικά με το K_5 ή το $K_{3,3}$] • Θεωρώ το γράφημα $G' = G * K_1$:



• Το G' δεν είναι επίπεδο. [Έστω ότι ήταν επίπεδο. Τότε η v ανήκει σε μία όψη που περιέχει όλες τις κορυφές του G. $\Rightarrow$ Το G' είναι εξωεπίπεδο. ***Άτοπο.***]
• Το G' περιέχει υπογράφημα H ομοιομορφικό με το K_5 ή το $K_{3,3}$.
• Το H περιέχει την v. [Γιατί το G είναι επίπεδο] • Εάν αφαιρέσουμε την v από το H αφαιρούμε μια κορυφή από το K_5 ή το $K_{3,3}$, οπότε, το G περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_4 ή το $K_{2,3}$. ***Άτοπο.*** ✓ ■

Θεώρημα 11.11 :

Για κάθε εξωεπίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές ισχύει ότι:

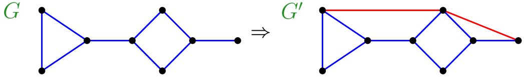
$$m \leq 2n - 3 \qquad (9)$$

Απόδειξη :

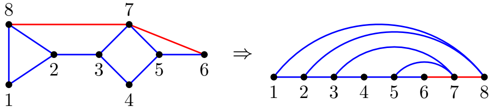
• Ισχύει προφανώς για ακυκλικά γραφήματα. $[m \leq n-1]$ • Έστω G ένα εξωεπίπεδο γράφημα με κύκλους και έστω μια εξωεπίπεδη απεικόνισή του. • Κατασκευάζουμε το G' προσθέτοντας ακμές στο G έτσι ώστε να μην υπάρχουν γέφυρες και να μην πλήττεται η εξωεπιπεδότητά του.

• Έστω m' οι ακμές του G', $m \leq m'$.

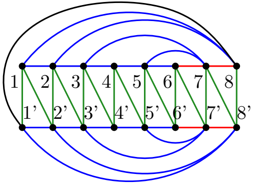
Παράδειγμα:



• Ζωγραφίζουμε το G' έτσι ώστε όλες οι κορυφές του να είναι στην ίδια ευθεία και ``ελεύθερες'' προς τα κάτω:



- Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ οι κορυφές του όπως τις συναντάμε από αριστερά προς τα δεξιά. • Σχηματίζω το επίπεδο γράφημα G'' όπως παρακάτω:
  - Τοποθετώ 2 αντίγραφα του G' ``καθρεπτικά'' το ένα ως προς το άλλο. Έστω $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ οι κορυφές του 2ου αντίγραφου.
  - Προσθέτω τις ακμές (ευθ. τμήματα) (v_i, v'_i), $1 \leq i \leq n$.
  - Τριγωνοποιώ τις όψεις $v_i v_{i+1} v'_{i+1} v'_i v_i$ προσθέτοντας την ακμή $(v_i v'_{i+1})$, $1 \leq i < n$.
  - Προσθέτω την ακμή (v_n, v'_1).



- Το G'' είναι επίπεδο με $|V(G'')| = 2n$ και $E(G'') = 2m' + 2n$. • Από Θ. 11.4:

$$\begin{aligned} 2m' + 2n &\leq 3 \cdot 2n - 6 \Leftrightarrow \\ 2m' &\leq 4n - 6 \Leftrightarrow \\ m' &\leq 2n - 3 \end{aligned}$$

• $m \leq 2n - 3$. [Γιατί $m \leq m'$.] ∎

Χρωματισμός επίπεδων γραφημάτων

Θεώρημα 11.12 :

Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 6-χρωματίσιμο.

Απόδειξη *[Με επαγωγή ως προς το πλήθος κορυφών] :*

- Έστω επίπεδο γράφημα G με n κορυφές.

  Βάση: $n \leq 6$. ✓

  Αναδρομή:
  - Έστω κορυφή v του G τέτοια ώστε $d(v) \leq 5$.

    Η κορυφή v πάντα υπάρχει. [Λήμμα 11.8]
  - Χρωματίζουμε αναδρομικά το $G - \{v\}$ με 6 χρώματα.
  - Οι γείτονες της v στο G έχουν χρωματιστεί με το πολύ 5 χρώματα.

    Χρωματίζουμε την v με το (τουλάχιστον ένα) μη-χρησιμοποιηθέν χρώμα. ✓ ∎

Θεώρημα 11.13 *[Heawood-1890]*:

Καθε επίπεδο γράφημα είναι 5-χρωματίσιμο.

Απόδειξη *[Με επαγωγή ως προς το πλήθος κορυφών] :*

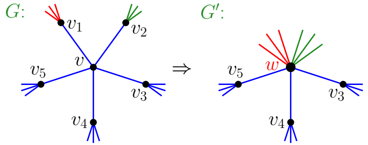
- Έστω επίπεδο γράφημα G με n κορυφές.

  Βάση: $n \leq 5$. Το G χρωματίζεται με 5 χρώματα. ✓

Αναδρομή:

- Έστω κορυφή $v \in V(G)$ με $d(v) \leq 5$. • Το $G - \{v\}$ χρωματίζεται αναδρομικά με 5 χρώματα.
- Αν $d(v) < 5$, η v χρωματίζεται με το (τουλάχιστον 1) μη-χρησιμοποιηθέν χρώμα. ✓ • Έστω $d(v) = 5$ και $N_G(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. • Υπάρχουν 2 γείτονες της v, έστω οι v_1, v_2 οι οποίοι δεν είναι ενωμένοι με ακμή στο G.
[Διαφορετικά, το G θα περιείχε το K_5.]

- Κατασκευάζουμε το γράφημα G' από το G κάνοντας σύμπτυξη των ακμών (v, v_1), (v, v_2).



- Χρωματίζουμε αναδρομικά το G' με 5 χρώματα και, έστω οι v_3, v_4, v_5 έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 3, 4, 5 και έστω η w έχει χρωματιστεί με το χρώμα 1. • Χρωματίζουμε νόμιμα το G ως εξής:
  - Οι κορυφές v_1 και v_2 με το χρώμα 1. [$(v_1, v_2) \notin E(G)$]
  - Η κορυφή v με το χρώμα 2.
  - Όλες οι άλλες κορυφές διατηρούν το χρωματισμό του G'. ✓

Θεώρημα 11.14 *[Appel&Haken-1977]*:

Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 4-χρωματίσιμο. ■

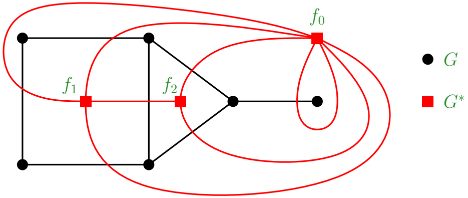
Δυικό (dual) επίπεδου γραφήματος:

Το ***δυικό γράφημα ενός επίπεδου γραφήματος*** G είναι ένα γράφημα G^* το οποίο έχει ως:

$$V(G^*) = \{f : f \in \mathcal{F}(G)\}$$

$$E(G^*) = \{e = (f, g) : \text{Οι όψεις } f \text{ και } g \text{ βρίσκονται στις 2 ``πλευρές'' της ακμής } e \in E(G).\}$$

Παράδειγμα:



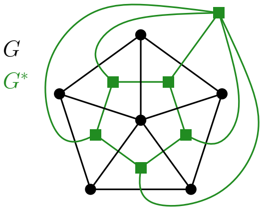
Σημείωση: Το δυικό γράφημα G^* του G είναι επίπεδο γράφημα το οποίο μπορεί να έχει παράλληλες ακμές και/ή βρόχους.

***k*-χρωματισμός ως προς τις όψεις:**

Ο χρωματισμός των όψεων ενός επίπεδου γραφήματος στο οποίο γειτονικές όψεις (όψεις με κοινή ακμή) έχουν διαφορετικό χρώμα.

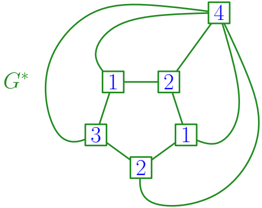
> **Σημείωση:** Ο χρωματισμός όψεων ενός γραφήματος G είναι ισοδύναμος με το χρωματισμό κορυφών του G^* (αφού αφαιρεθούν οι παράλληλες ακμές και οι βρόχοι).

Παράδειγμα:

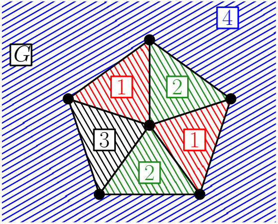


Γράφημα G και το δυικό του G^*

$\Rightarrow$



4-χρωματισμός του G^*



4-χρωματισμός όψεων του G

Θεώρημα 11.15 :

Ένα επίπεδο γράφημα είναι 2-χρωματίσιμο ως προς τις όψεις ανν έχει κύκλο Euler. ■